Alexander Ziwet

COURS

DE

MÉCANIQUE RATIONNELLE

A L'USAGE

DES INGÉNIEURS ET DES OFFICIERS

56

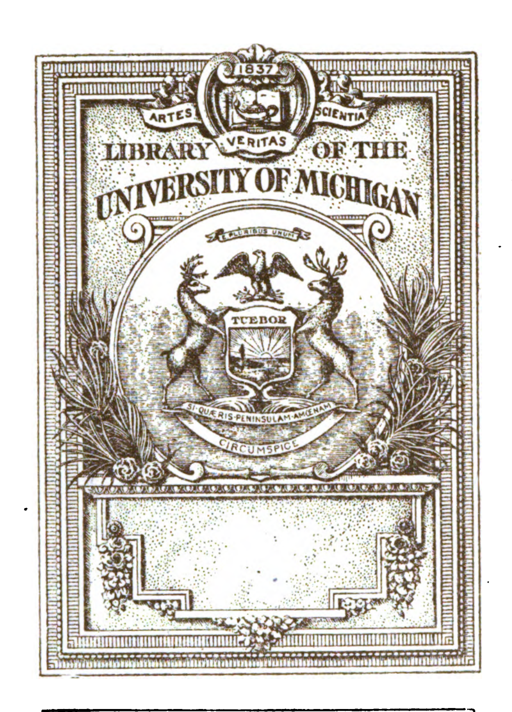
PAR

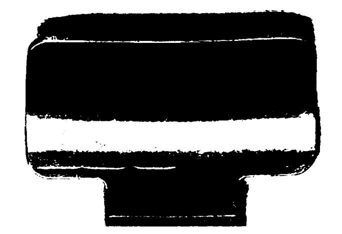
A. JANSSEN
CAPITAINE-COMMANDANT D'ARTILLERIE,
INGÉNIEUR CIVIL DES MINES,
PROFESSEUR DE MÉCANIQUE GÉNÉRALE ET APPLIQUÉE A L'ÉCOLE MILITAIRE

BRUXELLES
H. LAMERTIN, Éditeur
20, rue du Marché au Bois

PARIS
H. HERMANN, Éditeur
Rue de la Sorbonne, 8 à 12

1902


1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE



COURS

DE

MÉCANIQUE RATIONNELLE

COURS

DE

MÉCANIQUE RATIONNELLE

A L'USAGE

DES INGÉNIEURS ET DES OFFICIERS

PAR

A. JANSSEN
CAPITAINE-COMMANDANT D'ARTILLERIE,
INGÉNIEUR CIVIL DES MINES,
PROFESSEUR DE MÉCANIQUE GÉNÉRALE ET APPLIQUÉE A L'ÉCOLE MILITAIRE

BRUXELLES
H. LAMERTIN, Éditeur
20, rue du Marché au Bois

PARIS
H. HERMANN, Éditeur
Rue de la Sorbonne, 8 à 12

1902

Prof. Albert Ziwet
gt.
2-10-1923

LOUVAIN
Imprimerie POLLEUNIS et CEUTERICK, rue des Orphelins, 32.

—

Même maison à Bruxelles, 37, rue des Ursulines.

MÉCANIQUE

LIVRE I[er]

THÉORIE VECTORIELLE (1)

CHAPITRE I[er]

§ 1. *Des vecteurs*

1. **Définitions.** — Une ligne droite est définie par sa grandeur, sa direction et son sens. Cette dernière propriété nécessite une explication, que nous donnerons en considérant une droite OA. Elle commence au point O appelé origine et finit au point A qui est dit l'extrémité (*Fig.* 1). On lui attribue le sens du mouvement du mobile qui la parcourt de l'origine vers l'extrémité, ce que l'on indique en plaçant une flèche à celle-ci et en écrivant les lettres de telle manière, que la première soit toujours celle qui désigne l'origine. On donne au segment OA ainsi envisagé le nom de *vecteur*.

Par suite de cette convention, AO est un vecteur de sens contraire à OA. Sur une même direction nous observons deux sens opposés. On attribue à l'un d'eux le signe +, à l'autre le signe —, ainsi AO = — OA.

La construction d'un vecteur exige la connaissance de l'origine, à partir de laquelle il suffit de porter la grandeur dans la direction et le sens convenables.

(1) Voir : Cours de M. Massau, professeur à l'Université de Gand; Mémoire de M. Demoulin, couronné au concours de l'Enseignement supérieur pour 1890-91.

2. Deux vecteurs de mêmes grandeur, direction et sens sont dits égaux géométriquement, ou *équipollents.*

L'équipollence se représente en mettant le signe = entre les notations des deux vecteurs surmontées d'une barre.

Exemple : $\overline{OA} = \overline{O'A'}$.

Deux vecteurs équipollents ont nécessairement des projections égales sur un même axe. Elles se confondent lorsque les vecteurs ont la même origine.

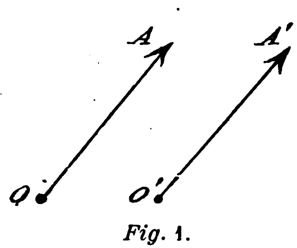


Fig. 1.

3. On appelle somme géométrique ou résultante de vecteurs possédant la même origine, le vecteur issu de ce point et qui, pris en sens inverse, ferme le contour polygonal formé en menant par l'extrémité de l'un d'eux, considéré arbitrairement comme premier, un vecteur équipollent au second ; par l'extrémité ainsi obtenue, un vecteur équipollent au troisième et ainsi de suite. Les vecteurs donnés sont dits les composantes de la résultante. Nous les désignons par $\overline{l}_1, \overline{l}_2, \overline{l}_3$. Ils sont liés à la résultante $\overline{R}$ par l'équipollence :

$$\overline{R} = \overline{l}_1 + \overline{l}_2 + \overline{l}_3 \ (Fig.\ 2).$$

Dans le cas particulier où les composantes ont toutes la même direction, la somme géométrique devient une somme algébrique.

4. Théorème. — *Lorsqu'on multiplie par un même facteur réel les termes d'une somme géométrique, la résultante est multipliée par ce facteur.*

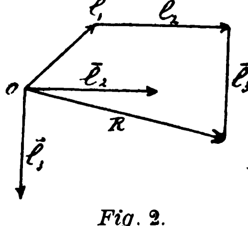


Fig. 2.

Cela revient à démontrer que si : $\overline{R} = \overline{l}_1 + \overline{l}_2 + \overline{l}_3$, on a aussi :

$$\overline{mR} = \overline{ml_1} + \overline{ml_2} + \overline{ml_3}.$$

En effet, multiplier un vecteur par m, c'est construire un autre vecteur parallèle et de même sens, mais dont la grandeur est à celle du vecteur donné, dans le rapport m. La ligne polygonale

$\overline{ml_1} + \overline{ml_2} + \overline{ml_3}$ est donc semblable à $\bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3$, semblablement disposée et dans le rapport m. Les droites qui ferment ces contours sont par suite, parallèles, de même sens et dans le rapport indiqué. Elles sont égales à $\overline{R}$ et $\overline{mR}$.

Il est à remarquer que m peut être entier, fractionnaire et même négatif. Dans cette dernière hypothèse la convention admise au nº 1, indique qu'il faut changer le sens de la résultante obtenue en prenant m en valeur absolue ou positive.

5. **Théorème.** — *La projection d'une résultante sur un axe est égale à la somme algébrique des projections des composantes.*

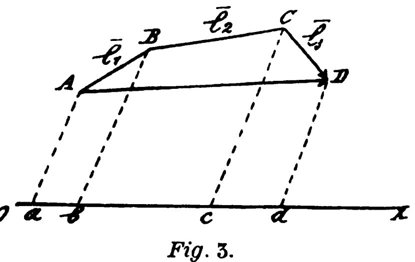


Fig. 3.

L'axe est positif dans un sens et négatif dans le sens opposé. Nous étendons cette convention aux projections des vecteurs. Elles ont pour origines et pour extrémités les projections des points correspondants. Ce sont des quantités algébriques que nous désignons par l_{1x}, l_{2x}, l_{3x}, suivant l'axe OX. La résultante

$$\overline{R} = \bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3,$$

prise en sens inverse, forme avec les composantes le polygone fermé ABCDA, dont la somme algébrique des projections sur OX est nécessairement nulle. Ainsi donc :

$$l_{1x} + l_{2x} + l_{3x} + (-R)_x = 0\,;$$

mais $(-R)_x = -R_x$, car deux droites directement opposées ont des projections de sens contraires sur une même direction. Par suite,

$$l_{1x} + l_{2x} + l_{3x} = R_x.$$

6. **Expression analytique de la résultante.** — Les vecteurs sont rapportés à trois axes rectangulaires OX, OY, OZ.

Ils sont déterminés en direction et en sens par les angles qu'ils forment avec les axes positifs. Soient λ, μ, ν, les angles directeurs

de la résultante; α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2, etc. ceux des composantes; R, l_1, l_2,... les grandeurs prises en valeur absolue. En vertu du nº 5 :

$$l_{1x} + l_{2x} + l_{3x} = R_x,$$

ou bien :

$$l_1 \cos \alpha_1 + l_2 \cos \alpha_2 + l_3 \cos \alpha_3 = R \cos \lambda ;$$

et d'une manière abrégée :

$$\Sigma l \cos \alpha = R \cos \lambda. \quad (1)$$

Dans cette égalité les vecteurs l_1, l_2, l_3, R, sont positifs et les cosinus sont des quantités algébriques. Il vient de même :

$$\Sigma l \cos \beta = R \cos \mu. \quad (2)$$
$$\Sigma l \cos \gamma = R \cos \nu. \quad (3)$$

Ces équations élevées au carré, et additionnées en tenant compte de la relation $\cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1$ donnent :

$$R^2 = (\Sigma l \cos \alpha)^2 + (\Sigma l \cos \beta)^2 + (\Sigma l \cos \gamma)^2 ;$$
$$R = + \sqrt{(\Sigma l \cos \alpha)^2 + (\Sigma l \cos \beta)^2 + (\Sigma l \cos \gamma)^2}.$$

Le radical est positif, car il représente la valeur absolue de la résultante, dont nous déterminons les cosinus directeurs par les formules suivantes tirées des équations (1), (2), (3) :

$$\cos \lambda = \frac{\Sigma l \cos \alpha}{R}, \quad \cos \mu = \frac{\Sigma l \cos \beta}{R}, \quad \cos \nu = \frac{\Sigma l \cos \gamma}{R}.$$

Le signe du cosinus indique sans hésitation l'angle correspondant. S'il est plus, c'est évidemment l'angle aigu qu'il faut prendre; s'il est moins, c'èst l'angle supplémentaire obtus.

Ces résultats montrent que la résultante est la diagonale du parallélipipède rectangle construit sur $\Sigma l \cos \alpha$, $\Sigma l \cos \beta$, $\Sigma l \cos \gamma$, portés sur les axes OX, OY, OZ, dans le sens convenable.

De là cette conséquence : la résultante est indépendante de l'ordre dans lequel on dispose les composantes.

7. **Décomposition d'une résultante en composantes de directions données.** — Soit d'abord à décomposer le vecteur $\overline{R}$ suivant les directions OA et OB. D'après le nº 3, il est la diagonale du parallélogramme construit sur les vecteurs composants, ce qui ramène le problème à la construction d'un parallélogramme

dont la diagonale et la direction des côtés sont données. Les trois directions doivent être dans le même plan. Si de plus on impose le sens des vecteurs composants, $\overline{R}$ doit se trouver dans l'angle formé par OA et OB prises dans le sens indiqué. On a donc :

$$\overline{R} = \overline{OA} + \overline{OB}.$$

Fig. 4.

Admettons maintenant trois directions.

Lorsqu'elles sont dans un plan, le problème est indéterminé ; si elles sont quelconques, il revient à construire un parallélipipède dont on connaît la diagonale et la direction des arêtes. Il faut d'ailleurs que $\overline{R}$ se trouve dans l'angle trièdre formé par les trois directions, prises dans le sens qu'on leur suppose.

Au delà de trois directions, le problème est indéterminé.

8. **Différence géométrique.** — La différence géométrique $\overline{l}_1 - \overline{l}_2$ est le vecteur $\overline{d}$ qu'il faut ajouter géométriquement à $\overline{l}_2$ pour obtenir $\overline{l}_1$.

Cette opération est indiquée par l'équipollence :

$$\overline{d} = \overline{l}_1 - \overline{l}_2 = \overline{l}_1 + (-\overline{l}_2).$$

Elle montre que le vecteur $\overline{d}$ est la résultante de $\overline{l}_1$ et de $\overline{l}_2$ changée de sens.

Les théorèmes démontrés aux n°s 4 et 5 pour les sommes géométriques s'appliquent aussi aux différences.

9. **Produit géométrique.** — *On appelle produit géométrique de deux vecteurs ayant même origine, le produit de l'un d'eux par la projection orthogonale de l'autre sur sa direction.*

Si la projection se fait dans le sens du vecteur sur lequel on projette, ils ont tous deux le même signe et le produit est positif ; si elle se fait en sens inverse, c'est-à-dire sur le prolongement, le produit est négatif.

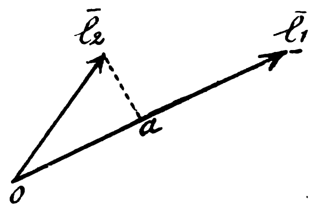


Fig. 5.

Soient $\overline{l}_1$ et $\overline{l}_2$ les deux vecteurs. Le produit géométrique est représenté par la notation symbolique $\overline{l_1 \, l_2}$. Il vaut :

$$l_1 \times oa = l_1\, l_2 \cos \widehat{l_1 l_2}, \text{ d'où la règle :}$$

Le produit géométrique de deux vecteurs est égal au produit de leurs grandeurs prises en valeur absolue, par le cosinus de l'angle qu'ils forment. Suivant que cet angle est aigu, droit ou obtus, le produit géométrique est positif, nul ou négatif.

Théorème. — *Le produit géométrique d'un vecteur par une somme géométrique, est égal à la somme algébrique des produits géométriques du vecteur par les composantes de la somme.*

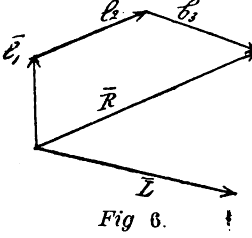


Fig 6.

Soit :

$$\bar{R} = \bar{l}_1 + \bar{l}_2 \ldots\ldots$$

que nous devons multiplier par $\bar{L}$. La projection de $\bar{R}$ sur la direction de $\bar{L}$ est liée aux projections des composantes, par la relation connue :

$$R \cos \widehat{RL} = l_1 \cos \widehat{l_1 L} + l_2 \cos \widehat{l_2 L} + \ldots\ldots$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par L, nous obtenons :

$$LR \cos \widehat{RL} = l_1 L \cos \widehat{l_1 L} + l_2 L \cos \widehat{l_2 L} \ldots\ldots$$

10. **Expression analytique du produit de deux droites.** — Soient X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, les projections de $\bar{l}_1$ et de $\bar{l}_2$ dans un système de trois axes rectangulaires ; nous avons :

$$\bar{l}_1 = \bar{X}_1 + \bar{Y}_1 + \bar{Z}_1, \quad \bar{l}_2 = \bar{X}_2 + \bar{Y}_2 + \bar{Z}_2.$$

Mais du théorème précédent résulte l'égalité :

$$\overline{l_1 l_2} = X_1 l_2 \cos \widehat{X_1 l_2} + Y_1 l_2 \cos \widehat{Y_1 l_2} + Z_1 l_2 \cos \widehat{Z_1 l_2}.$$

Chacun de ces termes se développe d'ailleurs d'une manière analogue ; ainsi :

$$X_1 l_2 \cos \widehat{X_1 l_2} = X_1 X_2 \cos \widehat{X_1 X_2} + X_1 Y_2 \cos \widehat{X_1 Y_2} + X_1 Z_2 \cos \widehat{X_1 Z_2}.$$

Or :

$$\cos \widehat{X_1 Y_2} = 0, \cos \widehat{X_1 Z_2} = 0, \cos \widehat{X_1 X_2} = \pm 1.$$

Le signe + convient quand les projections X_1, X_2, sont de même sens, le signe — quand elles sont de sens opposés.

La considération des valeurs algébriques X_1 et X_2 au lieu de leurs valeurs absolues, qui entraient dans l'équation précédente, permet donc d'écrire

$$X_1 l_2 \cos \widehat{X_1 l_2} = X_1 X_2.$$

On aurait de même :

$$Y_1 l_2 \cos \widehat{Y_1 l_2} = Y_1 Y_2, \quad Z_1 l_2 \cos \widehat{Z_1 l_2} = Z_1 Z_2,$$

les X, les Y et les Z n'étant pris avec leurs signes qu'aux seconds membres; par conséquent :

$$\overline{l_1 l_2} = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2.$$

Cette formule est d'un usage fréquent; il doit être bien entendu que les quantités X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, qui y entrent, portent avec elles leurs signes.

§ 2. *Moments des vecteurs*

11. On appelle moment d'un vecteur par rapport à un point, le produit de sa longueur par sa distance au point.

Le moment du vecteur $\overline{ab}$ par rapport au point O est égal à $ab \times oc$. Il vaut le double de la surface du triangle *oab*, obtenu en joignant le point O aux points *a* et *b* qui limitent le vecteur.

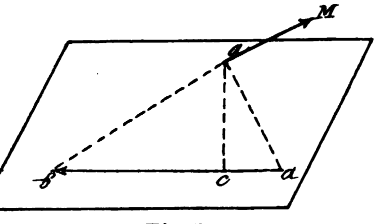


Fig. 7.

La plus courte distance OC est *le bras de levier*. Par convention *le moment d'un vecteur par rapport à un point est figuré géométriquement par un autre vecteur, dont la grandeur renferme autant d'unités de longueur que le moment renferme d'unités de surface. Il a comme origine le point donné. Sa direction est perpendiculaire au plan défini par la droite et le point; enfin il a un sens tel, qu'un observateur ayant les pieds à l'origine et la tête à l'extrémité de cette perpendiculaire, voie le*

bras de levier entraîné dans le sens des aiguilles d'une montre, par la flèche terminant le vecteur.

Ainsi dans la figure 7, il faut supposer que OM soit au-dessus du plan du papier.

Le moment du vecteur $\bar{l}$, par rapport au point O, se désigne par le symbole $\overline{M_O l}$. Il est évident que le moment du vecteur $-\bar{l}$ de même origine que $\bar{l}$, pris par rapport au point O, est égal à $-\overline{M_O l}$.

12. Théorème. — Le moment de la résultante de vecteurs ayant même origine, par rapport au point O_1, est égal à la résultante des moments des composantes.

Soient les vecteurs $\bar{l}_1$, $\bar{l}_2$, $\bar{l}_3$, issus d'une commune origine O (*Fig.* 8).

Ils ont pour résultante :

$$\overline{R} = \overline{OC} = \bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3.$$

Par définition $\overline{M_{O_1} l_1}$ est perpendiculaire au plan passant par O_1 et l, et par le fait même à la droite OO_1. Il se trouve dans le plan P normal à cette dernière direction. Sa grandeur mesure le double de la surface O_1OA, laquelle est égale au produit des longueurs de OO_1 et de la perpendiculaire Aa menée du point A sur OO_1. Il est évident que $Aa = O_1A_1$, projection de $\bar{l}_1$ sur le plan P; donc O_1A_1 est la grandeur de $\overline{M_{O_1} l}$, prise à l'échelle $\frac{1}{OO_1}$. Ce moment se représente par une droite $\overline{O_1M}$ satisfaisant aux conditions connues. Si l'on fait opérer à la droite $\overline{O_1A_1}$, ayant comme origine le point O_1, une rotation de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre par rapport à un observateur disposé les pieds en O_1 et la tête en O, on amène sa coïncidence en direction et en sens avec O_1M. La même remarque s'applique à toutes les autres droites, ainsi qu'à $\overline{R}$.

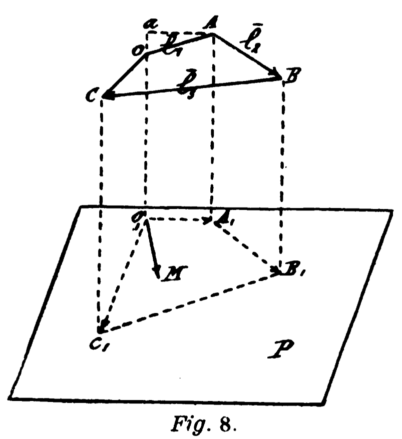


Fig. 8.

Cela étant admis, projetons $\bar{l}_1$, $\bar{l}_2$, $\bar{l}_3$, sur le plan P. En construisant la résultante des projections, nous formons une ligne polygonale qui est la ligne polygonale de l'espace projetée sur le plan P. Sa résultante $\overline{O_1C_1}$ est la projection de $\overline{OC}$. Il suffit de faire tourner ce polygone de 90° autour de OO_1 dans les conditions indiquées ci-dessus, pour que les différents côtés donnent géométriquement et à l'échelle $\frac{1}{OO_1}$ les moments des vecteurs et de leur résultante $\overline{OC}$. Dans cette nouvelle position, $\overline{O_1C_1}$ ne cesse pas d'être résultante de $\overline{O_1A_1}$, $\overline{A_1B_1}$, etc., ce qui démontre le théorème.

Si les vecteurs se trouvent tous dans un plan, leurs moments par rapport à un point quelconque de celui-ci, lui sont perpendiculaires. Les uns ont un sens que nous supposons positif, les autres de sens inverse sont négatifs et la somme géométrique devient une somme algébrique.

13. Moment d'un vecteur par rapport à un axe. — *Le moment d'un vecteur par rapport à un axe, est le moment de sa projection sur un plan perpendiculaire à l'axe, par rapport au point de percée de celui-ci. Ce point est le pied de l'axe.*

Soient $\overline{AB}$ la droite et OZ l'axe donnés (*Fig.* 9).

Par le point O, menons un plan perpendiculaire à l'axe, et projetons orthogonalement le vecteur $\overline{AB}$ ou $\bar{l}$ en $\overline{ab}$. Le moment de $\overline{ab}$ par rapport à O, est figuré par le vecteur $\overline{Om'}$, porté sur l'axe OZ dans le sens convenable et tel que sa longueur mesure le double de la surface du triangle *oab* (*Fig.* 9). C'est aussi le moment de $\overline{AB}$ par rapport à l'axe OZ. On l'indique par la notation symbolique : $M_z l$.

Ce moment est une grandeur algébrique, son signe dépend du sens qu'il possède, relativement à celui de l'axe OZ positif. S'il est le même, le moment est positif; s'il est de sens opposé, il est négatif.

De la définition précédente on déduit :

1° Le moment d'un vecteur par rapport à un axe est nul, quand il le rencontre ou lui est parallèle.

2° Le moment de la résultante de vecteurs ayant même origine, par rapport à un axe, est égal à la somme algébrique des moments des composantes, puisqu'ils ont tous même direction.

14. Théorème. — *Le moment d'un vecteur par rapport à un axe, est égal à la projection sur celui-ci, du moment du vecteur par rapport à un point quelconque de l'axe* (*Fig.* 9).

En effet, le moment du vecteur $\overline{AB}$ par rapport à un point O, est figuré par un vecteur $\overline{om}$ perpendiculaire au plan OAB et dont la longueur, portée dans le sens convenable, représente le double de la surface du triangle OAB. Le plan P perpendiculaire à OZ et le plan OAB font entre eux un angle i égal à l'angle $\widehat{mom'}$. D'autre part le triangle oab est la projection, sur le plan P, du triangle OAB et $oab = OAB \cos i$, de sorte que $om \cos i = oab = om'$.

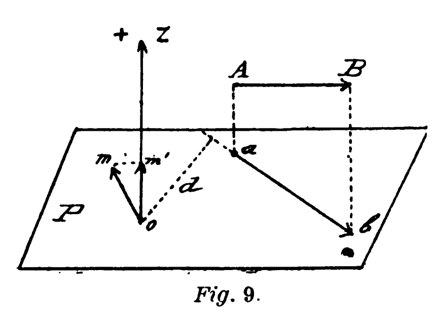


Fig. 9.

De là on conclut :

1° Les moments d'un vecteur par rapport à tous les points d'un axe, ont même projection sur celui-ci.

2° Le moment d'un vecteur établi par rapport à un axe mené par un point, passe par un maximum, quand l'axe est perpendiculaire au plan défini par le vecteur et le point.

15. Moments d'un vecteur par rapport aux axes rectangulaires de coordonnées.— Par suite d'une convention qui sera conservée pendant tout le cours, les axes positifs OX, OY, OZ sont tels qu'une rotation dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre autour de OZ amène OX vers OY et ainsi de suite pour les autres axes, par permutation tournante.

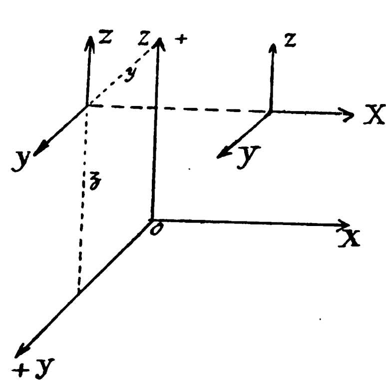


Fig. 10.

Soient x, y, z les coordonnées de l'origine du vecteur $\bar{l}$; X, Y, Z ses projections sur les axes rectangulaires OX, OY, OZ. Nous avons :

$$\bar{l} = \bar{X} + \bar{Y} + \bar{Z};$$

mais, en vertu du n° 13, $M_x l = M_x X + M_x Y + M_x Z$.

Or, $M_x X = 0$ puisque X est parallèle à l'axe OX et d'autre part la définition du moment d'un vecteur par rapport à un axe (n° 13) permet d'obtenir immédiatement $M_x Y$, car la projection Y sur le plan YOZ se fait en véritable grandeur. Son moment relativement à OX, est $-Yz$, par suite du sens positif de l'axe. De même $M_x Z = Zy$. En remplaçant ces quantités par leurs valeurs dans $M_x l$, on a :

$$M_x l = Zy - Yz = L.$$

Nous trouvons de même pour les autres axes :

$$M_y l = Xz - Zx = M.$$
$$M_z l = Yx - Xy = N.$$

Ces formules supposent implicitement X, Y, Z, x, y, z, positifs. Nous les généralisons en considérant ces quantités algébriquement. Tout changement de signe de l'une d'elles, amène un changement dans le sens des moments des droites X, Y, Z, en correspondance avec le signe nouveau des produits qui la renferment.

Les résultats précédents se retiennent facilement. Ce sont les mineurs du déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & X \\ 1 & y & Y \\ 1 & z & Z \end{vmatrix}$.

16. Moment par rapport à l'origine des axes. — Nous recherchons $\overline{M_o l}$ en fonctions de ses projections $M_x l$, $M_y l$, $M_z l$ (n° 15) sur les axes rectangulaires de coordonnées. Le problème résolu au n° 6 donne immédiatement :

$$M_o l = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2},$$
$$\cos\lambda = \frac{L}{M_o l}, \cos\mu = \frac{M}{M_o l}, \cos\nu = \frac{N}{M_o l}.$$

17. Moment d'un vecteur par rapport à un axe quelconque OI mené par l'origine des coordonnées. — L'axe OI fait avec les axes positifs OX, OY, OZ les angles α, β, γ. Il est démontré au n° 14 que $\overline{M_{oi} l}$ est la projection sur OI de $\overline{M_o l}$.

D'autre part : $\overline{M_o l} = \overline{M_x l} + \overline{M_y l} + \overline{M_z l}$ et par suite du n° 5 :

$$M_{oi} l = M_x l \cos M_x \widehat{l OI} + M_y l \cos M_y \widehat{l OI} + M_z l \cos M_z \widehat{l OI}.$$

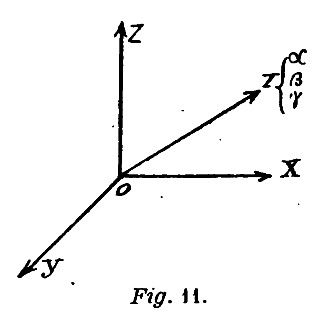


Fig. 11.

Si nous admettons que ces différents moments portent en eux leurs signes, $M_x l$, $M_y l$, $M_z l$, sont des quantités algébriques, positives ou négatives, suivant le sens qu'elles possèdent relativement aux axes positifs. Dès lors, quand on prend les angles α, β, γ au lieu des angles indiqués dans l'égalité précédente, celle-ci devient :

$$M_{oi} l = M_x l \cos \alpha + M_y l \cos \beta + M_z l \cos \gamma ;$$

dans cette relation $M_x l$, $M_y l$, $M_z l$ sont positifs.

18. **Relation entre les moments d'un vecteur par rapport aux divers points de l'espace. Théorème.** — *Le moment d'un vecteur* $\bar{l}$, *par rapport au point* O_1, *est résultant du moment du vecteur par rapport au point* O *et du moment par rapport à* O_1 *d'une équipollente menée par* O.

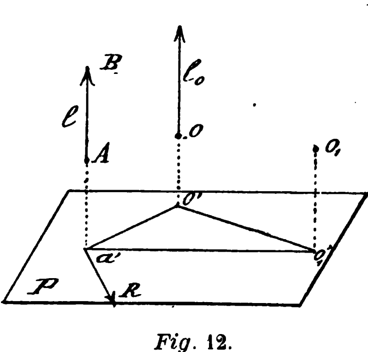


Fig. 12.

Soit $\bar{l}_o$ cette équipollente. Le théorème énoncé se traduit par l'égalité géométrique :

$$\overline{M_{o_1} l} = \overline{M_o l} + \overline{M_{o_1} l_o}.$$

Imaginons un plan P perpendiculaire à la direction de $\bar{l}$.

Les vecteurs $\bar{l}$, $\bar{l}_o$ et le point o_1 s'y projettent orthogonalement en a', o' et o'_1. Joignons $a'o'$, $o'o'_1$, et $a'o'_1$ et faisons opérer au triangle $a'o'o'_1$ une rotation de 90° dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre, pour l'observateur placé les pieds en A et la tête en B. Quand il est parvenu dans sa nouvelle position, je dis que nous avons :

$$\overline{a'o'} = \frac{\overline{M_o l}}{l}, \quad \overline{a'o'_1} = \frac{\overline{M_{o_1} l}}{l}, \quad \overline{o'o'_1} = \frac{\overline{M_{o_1} l_o}}{l}.$$

Démontrons la première de ces égalités, le même raisonnement convient pour les autres. Menons par a' le vecteur

$$\overline{a'R} = \overline{M_o l}.$$

Il se trouve dans le plan P, puisqu'il est perpendiculaire au plan ABO, c'est-à-dire à $\overline{l}$ et à $\overline{a'o'}$. Le sens qui lui est donné, résulte de la définition des moments (n° 11). Enfin sa longueur mesure le produit $l \times a'o'$. Ce vecteur coïncide en direction et en sens avec $\overline{a'o'}$ dans sa nouvelle position; par conséquent, l'égalité $\overline{a'o'} = \frac{\overline{M_o l}}{l}$ se trouve vérifiée. Les trois vecteurs $\overline{a'o'_1}$, $\overline{a'o'}$ et $\overline{o'o'_1}$ sont d'ailleurs liés par la relation géométrique :

$$\overline{a'o'_1} = \overline{a'o'} + \overline{o'o'_1}.$$

Elle subsiste encore après la rotation indiquée, mais dans cette situation nouvelle on a :

$$\frac{\overline{M_{o_1} l}}{l} = \frac{\overline{M_o l}}{l} + \frac{\overline{M_{o_1} l_o}}{l},$$

ou bien :

$$\overline{M_{o_1} l} = \overline{M_o l} + \overline{M_{o_1} l_o}.$$

§ 3. *Des systèmes de vecteurs*

19. Définition. — *Des vecteurs forment système, lorsqu'on les considère simultanément.* Nous les supposons distribués d'une manière quelconque dans l'espace. Leurs moments par rapport à un point O, se représentent par des vecteurs possédant ce point comme origine. *La somme géométrique de ces moments s'appelle le moment résultant du système par rapport au point* O.

La même convention s'applique aux axes. La somme géométrique devient une somme algébrique : c'est le moment résultant du système pour l'axe proposé. Ainsi que cela est démontré au n° 6 pour un vecteur, le moment résultant d'un système de vecteurs par rapport au point O, est la diagonale du parallélipipède, construit sur les moments résultants par rapport à trois axes rectangulaires ayant ce point comme origine.

20. Des couples de vecteurs. — *Deux vecteurs égaux, parallèles, de sens contraires, mais non directement opposés, constituent un couple.*

Le plan du couple est déterminé par les deux vecteurs. Le bras de levier est la plus courte distance qui les sépare.

Théorème. — *Le moment résultant d'un couple est constant par rapport à tous les points de l'espace.*

Fig. 13.

Soient $\overline{AB} = \bar{l}$, $\overline{CD} = -\bar{l}$ les deux vecteurs du couple ; ses moments par rapport aux points O et O_1 sont :

$$\overline{M_o l} + \overline{M_o(-l)} \text{ et } \overline{M_{o_1} l} + \overline{M_{o_1}(-l)}. \quad (19)$$

Mais il résulte du théorème démontré au n° 18 que :

$$\overline{M_{o_1} l} = \overline{M_o l} + \overline{M_{o_1} l_o},$$
$$\overline{M_{o_1}(-l)} = \overline{M_o(-l)} + \overline{M_{o_1}(-l_o)}.$$

Le moment du couple par rapport au point O_1 est donc égal à

$$\overline{M_o l} + \overline{M_{o_1} l_o} + \overline{M_o(-l)} + \overline{M_{o_1}(-l_o)}.$$

D'ailleurs $\overline{M_{o_1} l_o} = -\overline{M_{o_1}(-l_o)}$, et la somme géométrique précédente se réduit à $\overline{M_o l} + \overline{M_o(-l)}$.

Le moment du couple étant un vecteur constant, sert à le représenter. Il s'appelle l'*axe du couple.* En vertu du théorème précédent, on peut l'obtenir en prenant le moment d'un vecteur du couple, par rapport à un point de l'autre. C'est par exemple $\overline{OP}$.

21. Des systèmes de vecteurs équivalents. — *Deux systèmes de vecteurs sont dits équivalents, quand ils ont les mêmes moments résultants, quel que soit le point de l'espace par rapport auquel on les établit.*

Théorème. — *Deux systèmes de vecteurs possédant la même somme géométrique et le même moment résultant par rapport à un point donné de l'espace, sont équivalents.*

Soient $\bar{l}$ un vecteur du premier système, $\bar{l}'$ un vecteur du second. On donne :

$$\Sigma \overline{M_o l} = \Sigma \overline{M_o l'}, \quad \Sigma \bar{l} = \Sigma \bar{l}'.$$

Il faut prouver que pour tout autre point O_1 de l'espace, existe l'égalité :

$$\Sigma \overline{M_{o_1} l} = \Sigma \overline{M_{o_1} l'}.$$

En effet, nous avons démontré au nº 18 que

$$\overline{M_{o_1} l} = \overline{M_o l} + \overline{M_{o_1} l_o},$$

par conséquent :

$$\Sigma \overline{M_{o_1} l} = \Sigma \overline{M_o l} + \Sigma \overline{M_{o_1} l_o}$$

Mais par suite du nº 12, on a :

$$\Sigma \overline{M_{o_1} l_o} = \overline{M_{o_1} \Sigma l_o},$$

d'où l'on tire :

$$\Sigma \overline{M_{o_1} l} = \Sigma \overline{M_o l} + \overline{M_{o_1} \Sigma l_o}.$$

Nous trouvons de même pour le second système :

$$\Sigma \overline{M_{o_1} l'} = \Sigma \overline{M_o l'} + \overline{M_{o_1} \Sigma l'_o}.$$

D'ailleurs, on a par hypothèse :

$$\overline{\Sigma l'} = \overline{\Sigma l}, \quad \Sigma \overline{M_o l'} = \Sigma \overline{M_o l};$$

donc :

$$\Sigma \overline{M_{o_1} l} = \Sigma \overline{M_{o_1} l'}.$$

Nous en concluons :

1º La somme géométrique d'un système de vecteurs de même origine est équivalente au système.

2º Deux couples sont équivalents quand les axes sont équipollents.

De là ce théorème très important, qui renferme toute la théorie des couples :

Un couple peut être transporté et orienté d'une façon quelconque dans son plan ou dans tout autre plan parallèle en prenant à volonté les grandeurs des vecteurs et du bras de levier, pourvu que le moment ne varie pas.

22. **Réduction d'un système de couples. Théorème I.** — *Un couple est irréductible et ne peut se remplacer par un vecteur équivalent.*

Cette propriété est évidente, puisque le moment du vecteur varie avec le point par rapport auquel on l'établit, tandis que le moment du couple reste constant.

23. **Théorème II.** — *Un système de couples est équivalent au couple unique dont l'axe est résultant des axes des couples donnés.*

En effet, le moment résultant des vecteurs d'un couple est égal à l'axe, quel que soit le point de l'espace par rapport auquel on l'établit. Le moment résultant du système formé par les couples, jouit de la même propriété, puisqu'il est résultant des axes des couples donnés. Il représente donc un couple.

La réciproque de ce théorème est évidente. Elle permet de décomposer un couple en couples composants.

24. **Réduction d'un système quelconque de vecteurs. Lemme I.** — *Un vecteur est équivalent au vecteur équipollent, mené par un point quelconque de sa direction pris comme origine.*

Le théorème de l'équivalence nous apprend en effet, que le moment du vecteur n'a pas changé.

25. **Lemme II.** — *Deux vecteurs égaux et directement opposés, peuvent être ajoutés ou retranchés à tout système de vecteurs.*

En effet, le système modifié reste équivalent au système primitif, car le moment résultant de deux vecteurs est nul par rapport à tous les points de l'espace.

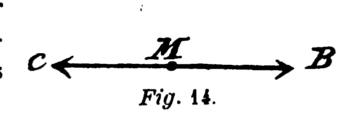


Fig. 14.

26. **Lemme III.** — *Un vecteur d'un système peut être remplacé par un vecteur équipollent dont l'origine est quelconque, à condition de lui adjoindre un couple dont l'axe soit le moment du vecteur transporté, par rapport au point pris comme nouvelle origine.*

Le vecteur $\bar{l} = \overline{\mathrm{OA}}$ doit être transporté au point M. Menons les vecteurs $\overline{\mathrm{MB}} = \bar{l}$, $\overline{\mathrm{MC}} = -\bar{l}$.

Elles ne modifient pas le système au point de vue de l'équivalence, mais $\overline{OA}$ et $\overline{MC}$ constituent un couple dont l'axe est $\overline{M_M l}$, et $\overline{MB}$ est équipollent à $\overline{OA}$.

Abordons maintenant le cas général. Le lemme précédent permet de prendre un point O comme origine commune des vecteurs, à la condition d'adjoindre à chacun d'eux, un couple convenablement déterminé. Le système ainsi transformé est équivalent au système proposé.

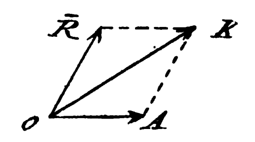
Il se compose de couples et de vecteurs ; ceux-ci, équipollents aux vecteurs donnés, sont menés par le point O. Ils ont une résultante équivalente $\overline{R}$ (21) ; de même les couples se réduisent au couple dont l'axe $\overline{R'}$ est résultant des axes des couples composants (23).

Soient $\overline{l}$ un vecteur du système, $\overline{M_o l}$ son moment par rapport au point O ; on a :

$$\overline{R} = \Sigma\overline{l}, \quad \overline{R'} = \Sigma\overline{M_o l}.$$

On donne à $\overline{R}$ le nom de ***résultante de translation;*** $\overline{R'}$ est dit l'axe ***du couple*** de transport pour le point O, que l'on appelle ***centre de réduction.*** La première est constante, le second dépend de la position du centre de réduction.

Déplaçons le couple de transport de manière à faire passer un de ses vecteurs par O (21). Ce vecteur se réduit avec $\overline{R}$ et donne la résultante $\overline{OK}$, le second vecteur du couple devient O'A', de sorte que le système est équivalent aux deux vecteurs $\overline{OK}$ et $\overline{O'A'}$, dont l'un $\overline{OK}$ passe par un point fixé d'avance.



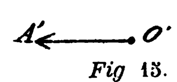


Fig 13.

On en conclut qu'***un système de vecteurs est équivalent à une infinité de systèmes différents, formés d'un vecteur et d'un couple, ou de deux vecteurs dont l'un passe par un point déterminé et peut avoir une direction fixée d'avance,*** car on peut faire tourner le couple et modifier les longueurs des vecteurs et du bras du levier, comme il est dit au nº 21.

27. Expression analytique de la résultante de translation et du couple de transport. — Prenons le centre de réduction

pour origine de trois axes rectangulaires OX, OY, OZ. Nous avons :

$$\overline{R} = \Sigma\overline{l}, \quad \overline{R'} = \Sigma\overline{M_o l} ;$$

chacune de ces équipollences équivaut à trois égalités algébriques; ainsi R, λ, μ, ν ; R′ λ′, μ′, ν′ étant les éléments qui déterminent analytiquement $\overline{R}$ et $\overline{R'}$; X, Y, Z et L, M, N étant les projections de $\overline{l}$ et de $\overline{M_o l}$ sur les axes, il vient en vertu du nº 6 :

$$R \cos \lambda = \Sigma X, \quad R' \cos \lambda' = \Sigma L,$$
$$R \cos \mu = \Sigma Y, \quad R' \cos \mu' = \Sigma M,$$
$$R \cos \nu = \Sigma Z, \quad R' \cos \nu' = \Sigma N,$$

d'où :

$$R = \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2},$$
$$\cos \lambda = \frac{\Sigma X}{R}, \quad \cos \mu = \frac{\Sigma Y}{R}, \quad \cos \nu = \frac{\Sigma Z}{R};$$
$$R' = \sqrt{(\Sigma L)^2 + (\Sigma M)^2 + (\Sigma N)^2},$$
$$\cos \lambda' = \frac{\Sigma L}{R'}, \quad \cos \mu' = \frac{\Sigma M}{R'}, \quad \cos \nu = \frac{\Sigma N}{R'}.$$

28. **Axe central.** — Parmi ces différents systèmes équivalents, il en est un remarquable ; c'est celui dans lequel l'axe du couple de transport est parallèle à la résultante de translation.

Fig. 16.

Dans le plan déterminé par $\overline{R}$ et $\overline{R'}$ issus du point O, décomposons $\overline{R'}$ suivant $\overline{R}$ et une perpendiculaire à cette direction, ce qui donne :

$$\overline{R'} = \overline{ON} + \overline{OP} \text{ (Fig. 16).}$$

Nous considérons $\overline{ON}$ et $\overline{OP}$ comme les axes de deux couples. Le premier est parallèle à $\overline{R}$; nous supposons que le second provienne du transport au point O_1 de la résultante de translation O_1S ayant comme origine le point O_1, dont nous allons rechercher la position. Il doit se trouver sur une perpendiculaire au plan PON menée par le point O et est défini par la condition $\overline{M_o O_1 S} = \overline{OP}$.

Le système formé par $\overline{O_1S}$ et le couple $\overline{ON}$ est donc équivalent au premier système et $\overline{O_1S}$ est parallèle à $\overline{ON}$.

L'axe O_1Z qui se confond dans l'espace avec $\overline{O_1S}$ est l'*axe central des couples*. Voici ses propriétés :

1° L'axe du couple de transport est indépendant du point de l'axe central pris comme origine.

En effet, le couple représenté par $\overline{OP}$ ne varie pas, quel que soit le point de O_1Z pris pour centre de réduction.

2° Le couple $\overline{ON}$ est minimum, car pour tout centre de réduction O extérieur à O_1Z, intervient un couple dont l'axe $\overline{OP}$ est perpendiculaire à $\overline{ON}$.

3° Pour tous les points d'une circonférence de centre O_1 et de rayon OO_1, tracée dans un plan perpendiculaire à O_1S, l'axe du couple de transport $\overline{R'}$ est incliné d'un angle constant sur une parallèle à l'axe O_1Z, dans le plan tangent au cylindre droit dont le cercle indiqué est la base. Le lieu des droites $\overline{R'}$ est donc un hyperboloïde de révolution autour de O_1Z.

29. **Théorème.** — *Un système se réduit à un vecteur équivalent, quand la résultante de translation est perpendiculaire à l'axe du couple de transport, pour un centre de réduction quelconque.*

Cet énoncé exclut l'hypothèse d'une résultante de translation nulle, c'est-à-dire que les projections ΣX, ΣY, ΣZ ne s'annulent pas simultanément.

L'axe $\overline{R'}$ étant perpendiculaire à la résultante de translation, il est permis de faire passer le plan du couple par cette droite, à laquelle nous prenons un des vecteurs du couple égal et directement opposé. L'autre lui est équipollent ; il a pour origine un point O_1 déterminé par la condition d'avoir $\overline{OP}$ égal à l'axe du couple. Les deux vecteurs $\overline{R}$ et $-\overline{R}$ de même origine disparaissent du système (25) et il reste $\overline{O_1S} = \overline{R}$ (*Fig.* 17).

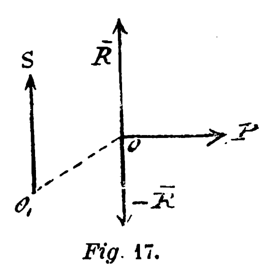


Fig. 17.

Quel que soit d'ailleurs le point O, le couple de transport nécessaire pour y amener le vecteur $\overline{O_1S}$ équivalent au système primitif, a son axe perpendiculaire au plan OO_1S et par conséquent à la résultante de translation.

Analytiquement, la condition $\cos \widehat{RR'} = 0$ devient .

$$\cos \lambda \cos \lambda' + \cos \mu \cos \mu' + \cos \nu \cos \nu' = 0.$$

En vertu du n° 27, cette relation donne :

$$\Sigma X \Sigma L + \Sigma Y \Sigma M + \Sigma Z \Sigma N = 0 \ (1).$$

Nous avons admis un système ne se réduisant pas à un couple ; dans cette hypothèse, la condition précédente est satisfaite lorsque les vecteurs sont parallèles ou situés dans un plan.

30. Résultante d'un système de vecteurs parallèles. — Considérons un système rectangulaire de coordonnées dans lequel l'axe OZ est parallèle à la direction commune des vecteurs. Leurs projections sur cet axe se font en véritable grandeur. D'après le sens qu'ils possèdent, nous distinguons deux catégories : les vecteurs positifs et les vecteurs négatifs.

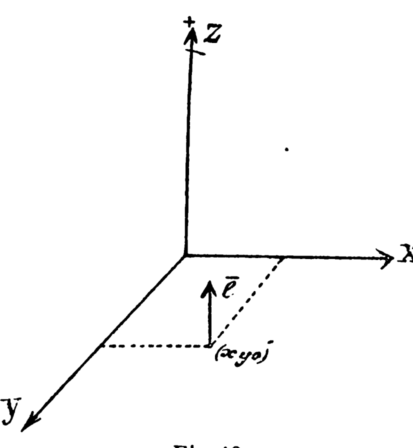


Fig. 18.

Si nous conservons les notations adoptées, nous aurons pour un vecteur $\bar{l}$:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = l.$$

Le problème se simplifie en plaçant toutes les origines dans le plan XOY. Cette opération, légitime au point de vue de l'équivalence, donne x, y, 0, comme coordonnées de l'origine d'un vecteur quelconque. La résultante $\bar{R}$ étant équivalente au système proposé, nous avons :

$$\bar{R} = \Sigma\bar{l}, \quad \overline{M_o R} = \Sigma \overline{M_o l} \ (21).$$

La première égalité géométrique se remplace par les trois équations :

$$R \cos \lambda = 0, \quad R \cos \mu = 0, \quad R \cos \nu = \Sigma l.$$

La résultante, parallèle aux vecteurs donnés. est donc égale à leur somme algébrique.

Enfin, nous obtenons les coordonnées x_1, y_1, O, de l'origine supposée de la résultante dans le plan des XY, par les trois équations :

$$M_x R = \Sigma M_x l, \quad M_y R = \Sigma M_y l, \quad M_z R = \Sigma M_z l.$$

La dernière est une identité. Les deux autres deviennent :

$$R y_1 = \Sigma l y, \qquad y_1 = \frac{\Sigma l y}{R} = \frac{\Sigma l y}{\Sigma l},$$

$$R x_1 = \Sigma l x, \qquad x_1 = \frac{\Sigma l x}{R} = \frac{\Sigma l x}{\Sigma l}.$$

31. **Cas particulier.** — On démontrerait facilement les deux théorèmes suivants :

1° *Deux vecteurs parallèles et de même sens, ont une résultante qui leur est parallèle, de même sens, égale à leur somme, et de position telle que sa direction divise leur plus courte distance, en deux segments inversement proportionnels aux vecteurs.*

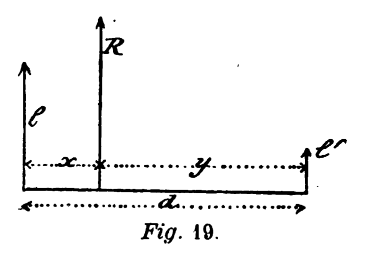


Fig. 19.

Nous avons par conséquent :

$$R = l + l', \quad x + y = d \quad \text{et} \quad \frac{l}{l'} = \frac{y}{x}. \quad (\textit{Fig. 19.})$$

2° *Deux vecteurs parallèles et de sens contraires, ont une résultante parallèle, de même sens que le plus grand, égale à leur différence et de position telle que sa direction détermine sur la plus courte distance prolongée du côté du plus grand des vecteurs, deux segments inversement proportionnels à ceux-ci.*

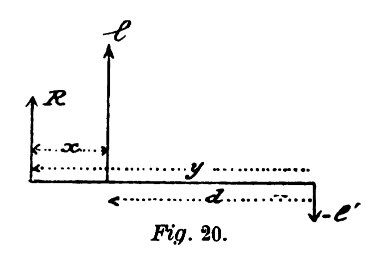


Fig. 20.

Donc : $R = l - l', y - x = d, \frac{l}{l'} = \frac{y}{x}$. (*Fig.* 20).

CHAPITRE II

DES FONCTIONS GÉOMÉTRIQUES

32. Une fonction géométrique est représentée par un vecteur de grandeur, de direction et de sens déterminés, pour chacune des valeurs d'une variable indépendante.

Cette variable, que nous appelons t, est une quantité algébrique à laquelle on peut attribuer toutes les valeurs imaginables depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Le vecteur $\bar{l}$ varie avec t ; c'est une fonction géométrique exprimée symboliquement par la relation $\bar{l} = \overline{f(t)}$.

Elle se construit en portant des droites équipollentes à $\bar{l}$, à partir d'un point O pris comme origine. Le lieu des extrémités forme une courbe qui est l'*indicatrice de la fonction.* Le point O est dit le *pôle* et le vecteur $\bar{l}$ est appelé *coordonnée géométrique ou vectorielle* du point M.

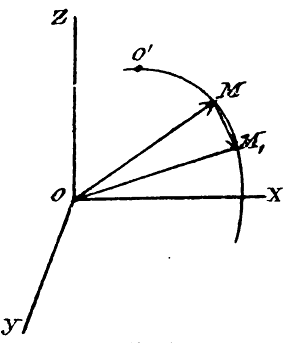


Fig. 21.

La fonction géométrique se remplace par trois fonctions analytiques, car l'extrémité M est déterminée, sur la courbe indicatrice, par les coordonnées x, y, z prises dans un système de trois axes rectangulaires auquel nous donnons le pôle pour origine. Nous avons :

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t).$$

La fonction géométrique peut alors s'écrire :

$$\bar{l} = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}, \text{ ou } \bar{l} = f_1\overline{(t)} + f_2\overline{(t)} + f_3\overline{(t)}.$$

Pour une valeur t de la variable, $\bar{l} = \overline{OM} = \overline{f(t)}$; pour la valeur $t + \Delta t$, il vient : $\bar{l}_1 = \overline{OM_1} = \overline{f(t + \Delta t)}$;

or : $$\overline{OM_1} = \overline{OM} + \overline{MM_1} ;$$

$\overline{MM_1}$ est dit l'accroissement géométrique de la fonction et nous le désignons par $\overline{\Delta l}$.

On appelle *dérivée géométrique* la limite du rapport $\frac{\overline{\Delta l}}{\Delta t}$, lorsque

$\overline{\Delta l}$ et Δt convergent simultanément vers zéro. C'est un vecteur complètement défini, dont la direction est tangente à l'indicatrice au point considéré.

Nous avons, en effet : $\overline{\Delta l} = \overline{\Delta x} + \overline{\Delta y} + \overline{\Delta z}$.

On peut diviser les termes d'une équation géométrique par un même nombre Δt et les quotients forment encore une équation géométrique ; donc : $\frac{\overline{\Delta l}}{\Delta t} = \frac{\overline{\Delta x}}{\Delta t} + \frac{\overline{\Delta y}}{\Delta t} + \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta t}$.

Dans cette relation, les quantités $\frac{\overline{\Delta l}}{\Delta t}, \frac{\overline{\Delta x}}{\Delta t}, \frac{\overline{\Delta y}}{\Delta t}, \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta t}$, doivent être portées, d'après ce même théorème, sur la droite MM_1 et sur les parallèles aux axes menées par le point M.

Si l'on passe à la limite, en faisant tendre Δt vers zéro, le premier membre de l'équation précédente devient, par définition, la dérivée géométrique de la fonction $\bar{l}$. Les quantités $\frac{\overline{\Delta x}}{\Delta t}, \frac{\overline{\Delta y}}{\Delta t}, \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta t}$ tendent vers leurs limites $\frac{\overline{dx}}{dt}, \frac{\overline{dy}}{dt}, \frac{\overline{dz}}{dt}$.

Nous avons donc à la limite :

$$\frac{\overline{dl}}{dt} = \frac{\overline{dx}}{dt} + \frac{\overline{dy}}{dt} + \frac{\overline{dz}}{dt}.$$

ce qui prouve que la dérivée géométrique $\frac{\overline{dl}}{dt}$ est la somme géométrique de trois vecteurs parallèles aux axes, dont les longueurs sont les valeurs des dérivées de x, y, z par rapport à t. Le sens qu'il faut attribuer à chacun d'eux est fixé par le signe de la dérivée correspondante.

La dérivée géométrique est donc déterminée et elle est dirigée suivant la tangente à l'indicatrice au point M.

Pour obtenir l'expression de sa grandeur, désignons par s la longueur rectifiée de l'arc d'indicatrice, comptée à partir d'une origine O′. La dérivée géométrique est la diagonale du parallélipipède rectangle construit sur $\frac{\overline{dx}}{dt}, \frac{\overline{dy}}{dt}, \frac{\overline{dz}}{dt}$; sa grandeur absolue, donnée par le radical $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$, est égale à $\frac{ds}{dt}$, abstraction faite du signe.

33. L'accroissement de la fonction géométrique, entre les valeurs t_0 et t de la variable indépendante, est *l'intégrale géométrique définie* de la fonction entre t_0 et t. Il a comme expression $\int_{t_0}^{t} \frac{\overline{dl}}{dt}\, dt$ et il est représenté par la corde $\overline{MM_1}$ de l'arc d'indicatrice correspondant aux valeurs t_0 et t.

LIVRE II

CINÉMATIQUE

CHAPITRE III

§ 1. *Mouvement du point*

34. Définitions. — *La mécanique est la science du mouvement.*

Un corps ou un point est en mouvement, quand il occupe successivement diverses positions dans l'espace ; il est au repos si sa position ne varie pas. Nous jugeons du mouvement d'un mobile, en rapportant sa position à celle d'un autre corps considéré comme fixe, et qui est pris comme repère. Lorsque les distances des points des deux corps sont constantes, il y a repos ; dans tous les autres cas, il y a mouvement.

La notion de repos ou de mouvement est donc essentiellement relative au système de comparaison choisi comme repère ; si l'on attribue à celui-ci la propriété idéale d'une fixité complète, le repos et le mouvement estimés comme nous venons de l'indiquer, sont dits absolus ; s'il en est autrement, ils sont relatifs (1).

En réalité, tous les repères que nous pouvons trouver dans l'univers sont mobiles et tous les mouvements que nous percevons sont relatifs.

L'espace et le temps, qui interviennent dans la définition du mouvement, ne peuvent être définis, mais ils sont mesurables ; et c'est la seule chose qui importe au point de vue scientifique.

Deux intervalles de temps sont égaux, quand ils ont la durée d'un phénomène qui se reproduit dans des conditions parfaitement identiques.

(1) La notion du repos et du mouvement absolus sera complétée ultérieurement. En cinématique, nous ne considérons que des mouvements relatifs.

En pratique, l'unité de temps est la seconde ; c'est la $\frac{1}{86400}$ partie du jour solaire moyen. La géométrie apprend à mesurer l'espace. Dans cette opération, on prend comme unité le mètre.

Pour simplifier l'exposition du cours, nous considérerons d'abord le mouvement en lui-même, indépendamment des causes qui le produisent ou le modifient, c'est-à-dire des forces. C'est le but de la *cinématique*. — Nous étudierons ensuite les relations entre le mouvement et les forces. Cette seconde partie forme la mécanique proprement dite.

La cinématique fait abstraction de la matière, par laquelle la force se manifeste à nos sens. Dans ces conditions, le point cinématique se confond avec le point géométrique, et le corps solide devient une collection de points géométriques de figure invariable.

Le développement naturel du cours résulte de ces définitions. Nous étudierons en premier lieu le mouvement du point et ensuite le mouvement du corps.

35. Expression de la loi du mouvement. — La *trajectoire* d'un point est la ligne continue formée par la suite des positions successives qu'il occupe dans l'espace.

La détermination de cette courbe exige la connaissance des forces, et comme elles n'interviennent pas en cinématique, nous admettons que la trajectoire soit donnée. Elle peut être parcourue par le mobile d'une infinité de manières différentes ; à chacune d'elles se rapporte une forme particulière de la loi du mouvement, qui doit faire connaître à chaque instant la position du mobile sur sa trajectoire. Nous ne pouvons la rechercher, car elle aussi dépend des forces.

Pour la représenter, nous adoptons la convention suivante : Un instant bien déterminé étant choisi comme origine des temps, les époques antérieures sont négatives et les époques postérieures positives. Le temps t est donc une variable qui peut passer, d'une façon continue, par tous les états de grandeur depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$. Si nous rapportons la position du mobile à un pôle, la coordonnée géométrique correspondante est une fonction continue du temps $\bar{l} = \overline{F(t)}$, qui a pour indicatrice la trajectoire. Elle renferme implicitement la loi du mouvement, car elle donne la position du mobile à chaque instant.

Pour obtenir cette loi explicitement, nous nous imposons une

seconde convention : On prend sur la trajectoire un point fixe O, que l'on appelle *l'origine des espaces*. La longueur rectifiée s de l'arc qui sépare ce point de la position du mobile, sert à la déterminer. Nous évitons toute confusion en considérant les longueurs d'arc comme positives quand elles sont portées de O vers B par exemple, comme négatives lorsqu'elles sont portées de O vers A. A l'origine des temps, le mobile est en M_0, la longueur $OM_0 = s_0$; à une heure quelconque t, il est en M et $OM = s$.

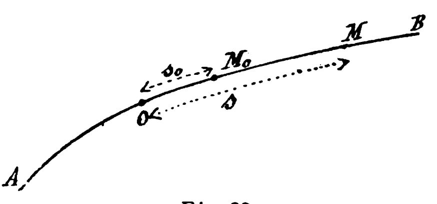


Fig. 22.

Il en résulte que la position du mobile est connue à chaque instant, du moment que l'on donne la relation entre s et le temps. La loi du mouvement est donc une fonction explicite et continue de cette variable ; elle sera de la forme $s = f(t)$.

36. De la vitesse. — Le mobile se trouve au point M de sa trajectoire à l'époque t; à l'époque $t + \Delta t$, il est passé en M_1. Menons la corde MM_1 qui réunit ces deux points. Le rapport géométrique $\frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}$ s'appelle *vitesse moyenne géométrique* pendant l'intervalle de temps considéré ; sa limite, quand le point M_1 se rapproche indéfiniment de M en même temps que Δt tend vers zéro, est dite la vitesse du mobile au point M. C'est la dérivée géométrique de la fonction $\bar{l} = F(\bar{t})$ qui détermine le mouvement, et elle est indépendante de l'origine choisie.

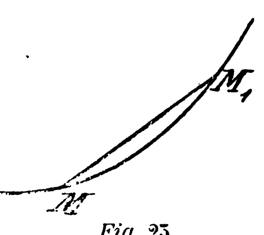


Fig. 23.

Il est démontré au n° 32 que sa direction est tangente à la trajectoire, pour la position occupée par le mobile. Elle a le sens du mouvement, sa grandeur est égale à $\frac{ds}{dt}$. En vertu de conventions antérieures, cette dérivée analytique est positive ou négative, suivant que l'arc s croît ou décroît en valeur relative, c'est-à-dire suivant que le mobile se meut vers B ou vers A (*Fig.* 22). Son signe se rapporte au sens du mouvement et sert à le déterminer.

37. Mouvement uniforme. — *Le mouvement est uniforme quand la grandeur de la vitesse est constante.* Cette définition se

traduit par l'égalité : $v = \frac{ds}{dt} = c^{te} = a$, et par suite $s = s_0 + at$, si s_0 désigne la valeur de s à l'instant zéro. On en déduit :

$$v = a = \frac{s - s_0}{t}.$$

Il s'ensuit que dans le mouvement uniforme, *la grandeur de la vitesse est l'espace parcouru par le mobile pendant l'unité de temps.*

38. **Mouvement varié.** — *Tout mouvement qui n'est pas uniforme est varié. Il est accéléré quand la vitesse croît en valeur absolue avec le temps, il est retardé dans l'hypothèse inverse.* La loi $s = f(t)$ qui le détermine varie dans chaque cas particulier. Ainsi qu'il est convenu au nº 36, la vitesse est représentée par un vecteur issu de la position du mobile, dirigé suivant la tangente à la trajectoire et dans le sens du mouvement ; celui-ci est indiqué par le signe de la dérivée $\frac{ds}{dt}$, laquelle donne aussi la grandeur de la vitesse (*Fig.* 24).

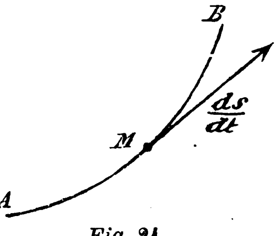


Fig 24.

Il en résulte cette seconde définition : *La vitesse est égale à l'espace qui serait parcouru par le mobile pendant l'unité de temps, si à l'instant considéré, le mouvement devenait rectiligne et uniforme.* Sa grandeur s'exprime en mètres par seconde. A la suite de ces conventions, la vitesse devient une fonction géométrique du temps ; son indicatrice se construit, en menant par un pôle O, des équipollentes aux vitesses du mobile à chaque instant.

39. **De l'accélération.** — Soient SS′ la trajectoire, M et M_1 les positions du mobile aux instants t et $t + \Delta t$. Les rayons vecteurs $\overline{oa}$ et $\overline{ob}$ de la courbe indicatrice des vitesses, parallèles aux tangentes à la trajectoire en M et M_1, sont équipollents aux vitesses contemporaines $\overline{V}$ et $\overline{V}_1$ (*Fig.* 25 et 26).

Ils font entre eux un angle que nous appelons $\Delta\varepsilon$, à condition de représenter par ε l'angle de $\overline{V}$ avec la tangente menée à la trajectoire, au point pris comme origine des espaces.

La corde $\overline{ab}$, qui est l'accroissement géométrique de la vitesse

pendant l'intervalle Δt, est désignée par le symbole $\overline{\Delta V}$. On l'appelle ***vitesse acquise par le mobile de M en M_1***.

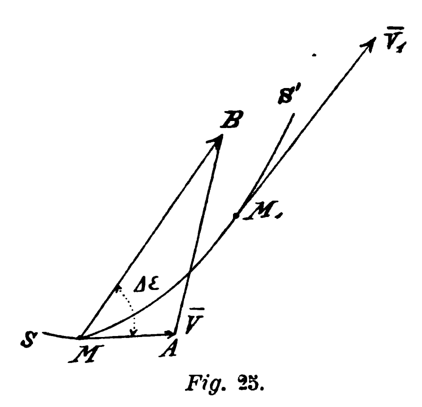


Fig. 25.

La dérivée géométrique de la vitesse par rapport au temps prend le nom d'*accélération totale* ou tout simplement d'accélération. Il est démontré au n° **32** que sa direction est tangente à l'indicatrice des vitesses au point considéré, et que son sens est déterminé. On convient de lui donner le point M comme origine. Mais le plan *oat* est parallèle au plan osculateur de la trajectoire en M, l'accélération se trouve donc dans ce dernier plan. Elle se représente comme la vitesse par une droite entièrement définie. L'analogie est d'autant plus grande, que l'accélération est égale à la vitesse d'un mobile fictif μ qui parcourt l'indicatrice des vitesses, de telle façon que sa position soit à chaque instant l'extrémité du rayon vecteur équipollent à la vitesse contemporaine du mobile réel. Le mobile fictif est dit l'*index* du mobile réel sur l'indicatrice. Sa vitesse au point *a* par exemple, est égale à $\lim \left(\frac{\overline{ab}}{\Delta t}\right) = \frac{\overline{dV}}{dt}$, dérivée géométrique de la fonction, ce qui démontre la propriété énoncée.

Ainsi que la vitesse, l'accélération se définit encore d'une autre façon. Elle est égale à la vitesse acquise par le mobile pendant l'unité de temps, si à partir de l'instant considéré, l'accroissement géométrique de la vitesse devient uniforme et de direction constante. Il n'y a pas d'unité spéciale pour mesurer l'accélération. On se contente d'indiquer le nombre d'unités de longueur qui exprime sa grandeur, en faisant connaître l'unité de temps adoptée. Exemple : à Bruxelles, l'accélération *g* de la pesanteur ramenée au niveau de la mer, est égale à $9^m,811$ par seconde.

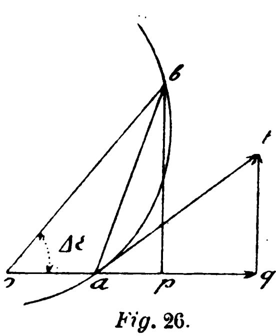


Fig. 26.

40. Définitions. — Au point a de la courbe indicatrice des vitesses (*Fig.* 26), menons $\overline{at}$ équipollente à l'accélération contemporaine et dans le plan oat, abaissons tq perpendiculaire à oa. La composante $\overline{qt}$ s'appelle l'*accélération centripète* et nous la désignons par $\overline{J}_c$; elle est dirigée parallèlement au rayon de courbure de la trajectoire en M et vers le centre de courbure, car le plan oat et $\overline{oa}$ sont respectivement parallèles au plan osculateur et à la tangente en ce point (*Fig.* 25).

La composante $\overline{aq}$ parallèle à la tangente prend le nom d'*accélération tangentielle.* Elle est représentée par $\overline{J}_t$.

Théorème. — L'accélération du mobile dans une position quelconque, est résultante de l'accélération centripète dont la valeur est $\frac{v^2}{\rho}$, et de l'accélération tangentielle qui est égale à $\frac{dv}{dt}$.

Du point b menons une perpendiculaire à oa et joignons les points a et b par la corde ab.

Nous avons les égalités géométriques suivantes :

$$\overline{ab} = \overline{ap} + \overline{pb}, \quad \frac{\overline{ab}}{\Delta t} = \frac{\overline{ap}}{\Delta t} + \frac{\overline{pb}}{\Delta t},$$

$$\lim \left(\frac{\overline{ab}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} = \lim \left(\frac{\overline{ap}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} + \lim \left(\frac{\overline{pb}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o};$$

$$\text{or } \lim \left(\frac{\overline{ab}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv} = \overline{J},$$

$$\lim \left(\frac{\overline{ap}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} = \overline{J}_t, \quad \lim \left(\frac{\overline{pb}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} = \overline{J}_c.$$

Les deux premières égalités résultent de définitions. Il en est de même de la troisième, si l'on tient compte qu'à la limite, la direction de $\overline{pb}$ est celle du rayon de courbure, puisqu'elle est perpendiculaire à une droite équipollente à la vitesse en M, dans un plan parallèle au plan osculateur de la trajectoire en ce point.

$$\text{Recherchons } \lim \left(\frac{ap}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} \text{ et } \lim \left(\frac{pb}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o}.$$

La longueur $pb = ob \sin \Delta\varepsilon$, et ob est la grandeur de la vitesse

à l'heure $t + \Delta t$; si v est la grandeur de la vitesse du mobile à l'heure t et Δv l'accroissement algébrique de la vitesse pendant l'intervalle Δt, nous avons $ob = v + \Delta v$ et par suite :

$$\frac{pb}{\Delta t} = \left(\frac{v + \Delta v}{\Delta t}\right) \sin \Delta\varepsilon = v \frac{\sin \Delta\varepsilon}{\Delta t} + \sin \Delta\varepsilon \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

$$\frac{pb}{\Delta t} = v \frac{\sin \Delta\varepsilon}{\Delta\varepsilon} \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} + \sin \Delta\varepsilon \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Passons à la limite pour Δt convergeant vers zéro et désignons par ρ le rayon de courbure de la trajectoire en M, il vient :

$$\lim \left(\frac{\sin \Delta\varepsilon}{\Delta\varepsilon}\right)_{\Delta t \equiv o} = 1, \quad \lim \left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} = v,$$

$$\lim \left(\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta s}\right)_{\Delta t \equiv o} = \frac{1}{\rho}, \quad \lim \Delta\varepsilon = 0, \quad \lim \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} = \frac{dv}{dt},$$

$$\lim \left(\frac{pb}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} = \frac{v^2}{\rho} = J_t.$$

De la même manière, on obtient :

$$ap = ob \cos \Delta\varepsilon - oa = (v + \Delta v) \cos \Delta\varepsilon - v$$
$$= v (\cos \Delta\varepsilon - 1) + \Delta v \cos \Delta\varepsilon.$$

$$\frac{ap}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \cos \Delta\varepsilon + v \left(\frac{\cos \Delta\varepsilon - 1}{\Delta t}\right) = \frac{\Delta v}{\Delta t} \cos \Delta\varepsilon - 2 v \frac{\sin^2 \frac{\Delta\varepsilon}{2}}{\Delta t}$$

$$= \frac{\Delta v}{\Delta t} \cos \Delta\varepsilon - 2 v \left(\frac{\sin \frac{\Delta\varepsilon}{2}}{\frac{\Delta\varepsilon}{2}}\right)^2 \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t} \frac{\Delta\varepsilon}{4};$$

$$\frac{ap}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \cos \Delta\varepsilon - \frac{v}{2} \left(\frac{\sin \frac{\Delta\varepsilon}{2}}{\frac{\Delta\varepsilon}{2}}\right)^2 \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t} \Delta\varepsilon.$$

Passons à la limite, en observant que :

$$\lim \left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} = \frac{dv}{dt}, \quad \lim (\cos \Delta\varepsilon)_{\Delta t \equiv o} = 1,$$

$$\lim\left(\frac{\sin\frac{\Delta\varepsilon}{2}}{\frac{\Delta\varepsilon}{2}}\right)_{\Delta t \equiv o} = 1, \quad \lim\left(\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} = \frac{d\varepsilon}{dt},$$

$$\lim\,(\Delta\varepsilon)_{\Delta t \equiv o} = 0.$$

Nous trouvons : $J_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$.

L'accélération tangentielle varie de sens avec $\frac{dv}{dt}$. Lorque cette dérivée a le même signe que la vitesse, le mouvement est accéléré, il est retardé dans l'hypothèse inverse. Dans le premier cas, l'accélération tangentielle a le sens de la vitesse et dans le second, elle est de sens opposé.

L'accélération centripète, essentiellement positive, est toujours dirigée vers le centre de courbure. On le prouve en menant par M une équipollente à $\overline{V}_1$; la vitesse acquise représentée par $\overline{AB}$, est dirigée vers la concavité de la trajectoire, si Δt et l'arc MM_1 sont suffisamment petits.

Nous en concluons que l'accélération fait avec la vitesse un angle aigu, obtus ou droit, suivant que le mouvement est accéléré, retardé ou uniforme. Dans ce dernier cas, l'accélération tangentielle est nulle.

41. Mouvement uniformément varié. — Le mouvement est dit *uniformément varié* quand la grandeur de la vitesse varie proportionnellement au temps. Par définition $\frac{dv}{dt} = J_t = j = C^{te}$. En intégrant cette relation, depuis l'instant zéro pour lequel la vitesse a comme grandeur V_o, jusqu'à l'instant t pour lequel elle est devenue V, il vient :

$$V - V_o = jt \text{ ou } V = V_o + jt,$$

ce qui détermine la vitesse du mobile à chaque instant. Nous obtenons sa position en recherchant s en fonction du temps par la relation $V = \frac{ds}{dt} = V_o + jt$.

Intégrée entre les mêmes limites que précédemment, elle donne :

$$s = s_o + v_o t + \frac{1}{2} jt^2.$$

Les lois du mouvement uniformément varié sont donc représentées par les relations suivantes :

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} jt^2, \quad v = v_0 + jt, \quad J_t = j, \quad J_c = \frac{v^2}{\rho}.$$

Dans le cas particulier où l'origine des espaces coïncide avec la position du mobile à l'origine des temps, $s_0 = 0$. D'une manière générale s_0, v_0, j, portent avec eux des signes qui dépendent des différentes conventions indiquées précédemment. Il est facile d'en déduire, que le mouvement est uniformément accéléré quand v_0 et j sont de même signe ; il est retardé, si ces quantités sont de signes contraires et cela, aussi longtemps que $v_0 > jt$ en valeur absolue. Dans cette hypothèse, la vitesse s'annule, change de signe et par conséquent de sens à l'instant $t = \frac{v_0}{j}$ à partir duquel le mouvement devient uniformément accéléré.

Prenons pour origine des temps, l'instant qui donne la vitesse nulle et pour origine des espaces, la position contemporaine du mobile, on a : $s_0 = 0$, $V_0 = 0$ et par suite :

$$s = \frac{jt^2}{2}, \quad v = jt, \quad \frac{dv}{dt} = j, \quad \frac{v^2}{\rho} = J_c.$$

Donc à partir de la nouvelle origine des temps, le mouvement est uniformément accéléré et a le sens déterminé par le signe de j, qui est aussi celui de v.

42. Mouvement rectiligne. — L'accélération totale se réduit à l'accélération tangentielle, car $\rho = \infty$; elle s'annule si le mouvement est uniforme.

Application. — On donne un point pesant lancé verticalement dans le sens ascendant avec une vitesse de 100 mètres par seconde. On demande la position et la vitesse du mobile après 5 secondes.

La position initiale du mobile étant prise pour origine des espaces, et le sens ascendant considéré positivement, nous avons en remarquant que l'accélération g est verticale :

$$s = 100t + \frac{1}{2} gt^2, \quad v = 100 + gt, \quad j = g = -9{,}8.$$

Le mouvement est donc uniformément retardé et pour $t = 5$, il vient ;

$$s = 337^m,36, \quad v = 50^m,95.$$

La vitesse s'annule à l'époque t_1 pour laquelle $v_0 + gt_1 = o$, d'où $t_1 = 10''2$. La vitesse change ensuite de signe et de sens, c'est-à-dire que la chute se produit.

43. Vitesse angulaire. — *On appelle vitesse angulaire d'un mobile qui décrit une circonférence, la vitesse du point situé sur le rayon solidaire du mobile, à l'unité de distance du centre.* Ce mobile fictif se meut sur la circonférence trigonométrique, ce qui explique le terme employé.

La vitesse angulaire se désigne par ω. Si α est l'arc de circonférence de rayon unité, qui mesure l'angle au centre correspondant à l'arc variable s, on a : $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ (36).

Cette vitesse s'évalue en mètres par seconde. Souvent on donne le nombre n de tours que ferait le mobile pendant une minute, si le mouvement devenait uniforme. Dans ce cas :

$$\omega = \frac{n.2\pi}{60} = \frac{n.2.22}{60.7} \text{ mètres.}$$

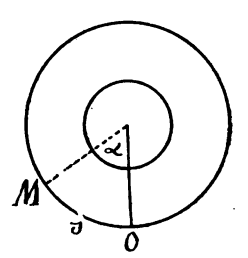


Fig. 27.

En partant de cette notion, les lois du mouvement circulaire s'écrivent :

$$s = r\alpha, \quad v = r\frac{d\alpha}{dt} = r\omega, \quad j = r\frac{d\omega}{dt}, \quad j_c = \omega^2 r.$$

Quand le mouvement est uniforme, ω est constant, j est nul et l'accélération totale devient égale à l'accélération centripète.

44. Mouvement périodique. — Le mouvement est dit *périodique*, quand *le mobile repasse par les mêmes points de la trajectoire et reprend les mêmes vitesses, après des temps égaux.* L'intervalle séparant deux de ces passages successifs, forme une période. Elle a une durée Δt, et Δs est la longueur rectifiée de l'arc de trajectoire correspondant.

Dans cette hypothèse, le rapport $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ est la grandeur moyenne de

la vitesse pendant la période. Souvent encore, elle est appelée vitesse moyenne, mais elle ne peut être confondue avec la vitesse moyenne géométrique. Nous reconnaissons que la vitesse moyenne pendant une période est constante, bien que la grandeur de la vitesse réelle puisse varier à chaque instant. Les machines donnent des exemples de mouvement périodique.

45. **Expression numérique de s, v, J.** — De ce qui précède, on conclut que la loi du mouvement suffit pour déterminer la position du mobile, sa vitesse et son accélération, lorsque la trajectoire est connue. Les dérivées successives de la fonction $s = f(t)$ donnent en effet :

$$\frac{ds}{dt} = f'(t) = v, \quad \frac{d^2s}{dt^2} = f''(t) = \frac{dv}{dt} = J_t, \quad \frac{v^2}{\rho} = J_c,$$

c'est-à-dire la vitesse, l'accélération tangentielle et l'accélération centripète. Les vecteurs qui les représentent, sont dirigés suivant la tangente et le rayon de courbure de la trajectoire, pour la position du mobile.

Les nombres qui expriment ces grandeurs, dépendent des unités de longueur et de temps, que nous désignons par L et T. Dans ces conditions s est une longueur égale à s fois L, t est un temps dont la durée vaut t fois T. Prenons d'autres unités L' et T' déterminées par les relations $L' = lL$, $T' = \tau T$; la même longueur et le même temps seront exprimés par $s' = \frac{sL}{L'} = \frac{s}{l}$ et $t' = \frac{tT}{T'} = \frac{t}{\tau}$.

Par suite :

$$\frac{ds'}{dt'} = \frac{\tau}{l}\frac{ds}{dt}, \quad \frac{d^2s'}{dt'^2} = \frac{\tau}{l}\frac{d\frac{ds}{dt}}{dt}\frac{dt}{dt'} = \frac{\tau^2}{l}\frac{d^2s}{dt^2};$$

or $\frac{ds}{dt}$ et $\frac{ds'}{dt'}$ sont précisément les nombres qui mesurent la vitesse, suivant que l'on emploie le premier ou le second système d'unités ; $\frac{d^2s}{dt^2}$, $\frac{d^2s'}{dt'^2}$, représentent l'accélération tangentielle dans les mêmes hypothèses. Pour passer des valeurs anciennes aux valeurs nouvelles, il suffit donc de multiplier la vitesse par $\frac{\tau}{l}$ et l'accélération tangentielle par $\frac{\tau^2}{l}$.

Soit, par exemple, le cas où les unités primitives sont le mètre et la seconde, les unités nouvelles le kilomètre et la minute. Nous avons $\frac{ds'}{dt'} = \frac{60}{1000}\frac{ds}{dt}, \frac{d^2s'}{dt'^2} = \frac{3600}{1000}\frac{d^2s}{dt^2}$.

CHAPITRE IV

ÉTUDE DU MOUVEMENT PROJETÉ

46. La position du mobile est rapportée à trois axes rectangulaires OXYZ. Si elle change, les coordonnées qui la définissent sont variables et fonctions du temps. Ce sont des relations de la forme $x = \varphi_1(t)$, $y = \varphi_2(t)$, $z = \varphi_3(t)$, absolument analogues à la loi du mouvement $s = f(t)$. Elles représentent les mouvements rectilignes de trois mobiles fictifs, qui sont les projections du mobile réel sur les axes. L'étude du mouvement dans l'espace est donc remplacée par l'étude des mouvements projetés, que nous venons d'indiquer.

Il faut en déduire la position du mobile, sa vitesse et son accélération à chaque instant. La première est la conséquence immédiate de la définition du mouvement projeté.

47. Vitesse. — Sa détermination résulte du théorème suivant :

Théorème. — *La vitesse de la projection d'un mobile sur un axe ou sur un plan, est la projection de sa vitesse dans l'espace.*

Soient M et M_1 les positions du mobile sur sa trajectoire aux époques t et $t + \Delta t$; on a :

$$\overline{V} = \lim \left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} = \overline{MA}.$$

Considérons l'axe OX sur lequel les projections orthogonales des points M et M_1 sont m et m_1. Elles ont pour abscisses x et $x + \Delta x$, de sorte que la vitesse du mouvement projeté est par définition, la limite de $\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$ pour Δt convergeant vers zéro; c'est la dérivée $\frac{dx}{dt}$. La vitesse $\overline{MA}$ se projetant sur OX en ma, il faut démontrer que :

$$ma = \frac{dx}{dt}.$$

Or, le cosinus de l'angle formé par la tangente MA à la trajectoire avec l'axe des X, est égal à $\frac{dx}{ds}$, et la vitesse $\overline{MA}$ a pour grandeur $\frac{ds}{dt}$, donc la projection $ma = \frac{ds}{dt}\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt}$, d'après le principe des fonctions de fonction. Mais $\frac{dx}{dt}$ est la vitesse de la projection du mobile; la proposition est donc établie, car la démonstration s'étend au cas des axes obliques, à l'aide du théorème fondamental des projections. Elle s'applique aussi à la projection sur un plan.

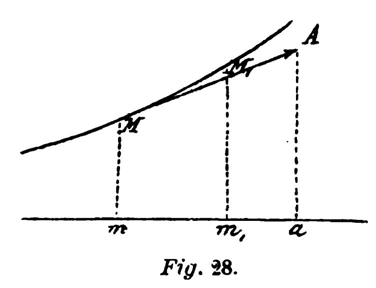


Fig. 28.

La vitesse du mobile est donc la résultante des vitesses de trois mobiles fictifs, représentés par les projections du point sur trois axes rectangulaires ou obliques. Si nous supposons le cas particulier où les axes sont rectangulaires, la vitesse dans l'espace est déterminée par sa grandeur V et par les angles α, β, γ, qui définissent la direction et le sens. En appliquant les formules données au n° 6, nous obtenons :

$$\overline{V} = \overline{\frac{dx}{dt}} + \overline{\frac{dy}{dt}} + \overline{\frac{dz}{dt}}, \quad \frac{dx}{dt} = V\cos\alpha, \quad \frac{dy}{dt} = V\cos\beta,$$
$$\frac{dz}{dt} = V\cos\gamma,$$

par conséquent :

$$V = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2},$$

$$\cos\alpha = \frac{\frac{dx}{dt}}{V}, \quad \cos\beta = \frac{\frac{dy}{dt}}{V}, \quad \cos\gamma = \frac{\frac{dz}{dt}}{V}.$$

48. **Accélération. — Théorème.** — *L'accélération de la projection d'un mobile sur un axe ou sur un plan, est la projection de l'accélération qu'il possède dans l'espace.*

Les axes sur lesquels on projette, forment un système de coordonnées rectangulaires, dont l'origine est prise comme pôle de la courbe indicatrice des vitesses A'B' (*Fig.* 29). A l'instant t l'index

est en μ et $\overline{o\mu}$ est égal à la vitesse contemporaine $\overline{V}$ du mobile. Il s'en suit que les coordonnées a, b, c, du point μ, sont respectivement égales aux projections $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, de $\overline{V}$ sur les axes.

Mais l'accélération étant la vitesse de l'index sur la courbe indicatrice, le théorème précédent donne :

$$\overline{J} = \overline{\frac{da}{dt}} + \overline{\frac{db}{dt}} + \overline{\frac{dc}{dt}}.$$

La projection de $\overline{J}$ sur OX est donc égale à la somme des projections des trois composantes, parmi lesquelles $\overline{\frac{db}{dt}}$, $\overline{\frac{dc}{dt}}$, sont perpendiculaires à l'axe, tandis que $\overline{\frac{da}{dt}}$ se projette en véritable grandeur. Nous avons ainsi :

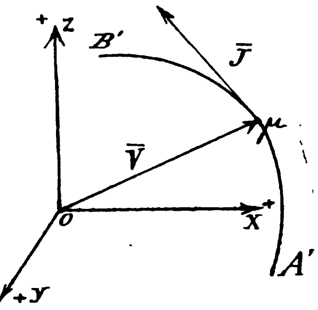


Fig. 29.

$$J_x = \frac{da}{dt} = d\,\frac{\frac{dx}{dt}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Ce résultat démontre le théorème, car l'accélération du mouvement projeté sur OX, se réduit à l'accélération tangentielle $\frac{d^2x}{dt^2}$ (n° 42).

Le principe des projections étant vrai pour les axes obliques ainsi que la relation $\overline{\frac{dl}{dt}} = \overline{\frac{dx}{dt}} + \overline{\frac{dy}{dt}} + \overline{\frac{dz}{dt}}$, la proposition existe encore, lorsqu'on effectue obliquement les projections. Il s'ensuit que l'accélération du mouvement dans l'espace est résultante des accélérations des mouvements projetés sur trois axes rectangulaires ou obliques. Dans le premier cas, l'accélération J et les angles directeurs λ, μ, ν (n° 6) sont déterminés par les formules :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = J \cos \lambda, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = J \cos \mu, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = J \cos \nu,$$

$$J = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2},$$

$$\cos \lambda = \frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{J}, \quad \cos \mu = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{J}, \quad \cos \nu = \frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{J}.$$

49. Déviation. — Le mobile est en M sur sa trajectoire à l'heure t, sa vitesse est $\overline{V}$. Si nous supposons que de l'époque t à l'époque $t + \Delta t$, le mouvement devienne rectiligne et uniforme, le mobile se déplace sur la tangente à la trajectoire au point M et arrive dans une certaine position m, telle que $\overline{Mm} = \overline{V}\,\Delta t$. La droite $\overline{mM_1}$ qui sépare le point m de la position réelle du mobile, est appelée la ***déviation*** pendant l'intervalle de temps considéré.

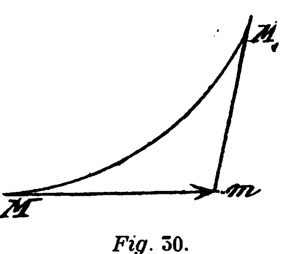


Fig. 30.

Théorème. — *L'accélération est équipollente au double de la limite du rapport géométrique de la déviation, au carré du temps correspondant.*

Soient Δx, Δy, Δz, les projections de l'arc MM_1 sur les axes rectangulaires de coordonnées. Nous les développons en séries d'après la formule de Taylor, en tenant compte que les mouvements projetés sont des fonctions continues du temps ; il vient :

$$\Delta x = \frac{dx}{dt}\,\Delta t + \frac{d^2x}{dt^2}\,\frac{\Delta t^2}{2} + R\,\Delta t^3.$$

$$\Delta y = \frac{dy}{dt}\,\Delta t + \frac{d^2y}{dt^2}\,\frac{\Delta t^2}{2} + R_1\Delta t^3.$$

$$\Delta z = \frac{dz}{dt}\,\Delta t + \frac{d^2z}{dt^2}\,\frac{\Delta t^2}{2} + R_2\Delta t^3.$$

Or $\overline{MM_1} = \overline{Mm} + \overline{mM_1}$, par conséquent les projections Δx, Δy, Δz, sont égales aux sommes algébriques des projections de $\overline{Mm}$ et de $\overline{mM_1}$. Il en résulte :

$$\frac{dx}{dt}\,\Delta t + \frac{d^2x}{dt^2}\,\frac{\Delta t^2}{2} + R\,\Delta t^3 = \frac{dx}{dt}\,\Delta t + mM_{1x},$$

ou bien : $$mM_{1x} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\frac{\Delta t^2}{1.2} + R\Delta t^3;$$

de même $$mM_{1y} = \frac{d^2y}{dt^2}\,\frac{\Delta t^2}{1.2} + R_1\Delta t^3,$$

$$mM_{1z} = \frac{d^2z}{dt^2}\,\frac{\Delta t^2}{1.2} + R_2\Delta t^3.$$

Ces relations peuvent être mises sous la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\,\mathrm{R}\,\Delta t = 2\,\frac{m\mathrm{M}_{1x}}{\Delta t^2},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\,\mathrm{R}_1\,\Delta t = 2\,\frac{m\mathrm{M}_{1y}}{\Delta t^2},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2\,\mathrm{R}_2\,\Delta t = 2\,\frac{m\mathrm{M}_{1z}}{\Delta t^2}.$$

Mais si Δt converge vers zéro, nous trouvons à la limite :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lim\left(2\,\frac{m\mathrm{M}_{1x}}{\Delta t^2}\right)_{\Delta t \equiv o}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \lim\left(2\,\frac{m\mathrm{M}_{1y}}{\Delta t^2}\right)_{\Delta t \equiv o},$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \lim\left(2\,\frac{m\mathrm{M}_{1z}}{\Delta t^2}\right)_{\Delta t \equiv o}.$$

Or, $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$, sont les projections de l'accélération sur les axes (48), donc $\overline{\mathrm{J}} = 2\lim\left(\frac{m\mathrm{M}_1}{\Delta t^2}\right)_{\Delta t \equiv o}$.

50. Étude du mouvement au moyen des coordonnées polaires.

A. *Mouvement plan.* La position du point M est définie dans le plan par la longueur r du rayon vecteur par rapport au pôle O et par l'angle θ que fait ce rayon avec l'axe polaire. Si le point se déplace, les coordonnées θ et r varient et sont fonctions du temps. Les deux relations $r = f_1(t)$, $\theta = f_2(t)$, donnent le mouvement et il suffit d'éliminer entre elles t, pour obtenir l'équation de la trajectoire.

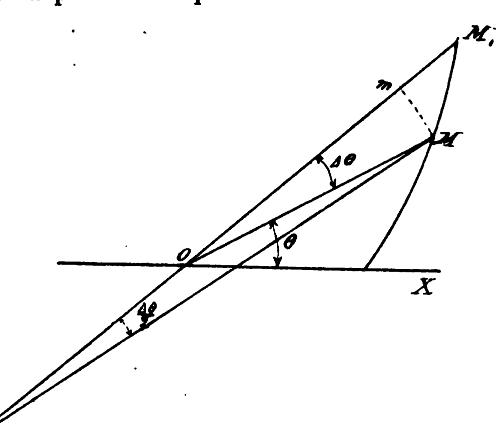


Fig. 31.

A l'époque t le mobile est en M, ses coordonnées sont r et θ; il

est passé en M_1 à l'époque $t + \Delta t$, ses coordonnées nouvelles sont $r + \Delta r$, $\theta + \Delta\theta$. Décrivons l'arc de circonférence Mm du point O comme centre, avec r comme rayon; nous avons $Mm = r\Delta\theta$.

Menons les cordes $\overline{Mm}$ et $\overline{MM_1}$. Il vient :

$$\overline{MM_1} = \overline{Mm} + \overline{mM_1};$$

$$\frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\overline{Mm}}{\Delta t} + \frac{\overline{mM_1}}{\Delta t}, \text{ (n° 4).}$$

$$(1) \lim \left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} = \lim \left(\frac{\overline{Mm}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} + \lim \left(\frac{\overline{mM_1}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o}.$$

Or :

$$MM_1 = \Delta s, \quad Mm = 2OM \sin \frac{\Delta\theta}{2} = 2r \sin \frac{\Delta\theta}{2}, \quad mM_1 = \Delta r;$$

par suite :

$$\lim \left(\frac{MM_1}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} = \frac{ds}{dt}, \quad \lim \left(\frac{Mm}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} = r \frac{d\theta}{dt},$$

$$\lim \left(\frac{mM_1}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} = \frac{dr}{dt},$$

L'équation (1) devient donc :

$$\frac{\overline{ds}}{dt} = r \frac{\overline{d\theta}}{dt} + \frac{\overline{dr}}{dt}.$$

Mais à la limite, l'angle $\widehat{m} = 90°$. Nous avons donc la relation :

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r \frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

$\frac{ds}{dt}$ est la vitesse réelle; $\frac{dr}{dt}$, vitesse projetée sur la direction variable du rayon vecteur, prend le nom de *vitesse de glissement*; $r \frac{d\theta}{dt}$ est la vitesse projetée sur la perpendiculaire au rayon vecteur. On l'appelle *vitesse de circulation* autour du pôle O et $\frac{d\theta}{dt}$ est la vitesse angulaire de circulation.

En résumé, la vitesse du mobile peut être considérée comme résultante des vitesses de circulation et de glissement, qui sont perpendiculaires entre elles.

51. Vitesse aréolaire. — *La vitesse aréolaire est la limite du rapport de l'aire engendrée par le rayon vecteur, au temps mis pour la décrire.*

Elle est égale à

$$\lim \left(\frac{\text{OMM}_1}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o}.$$

Or

$$\text{Lim} \left(\frac{\text{surface OMM}_1}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} = \lim \left(\frac{\text{triangle OMM}_1}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o}$$

$$= \lim \left[\frac{(r + \Delta r)\, r \sin \Delta \theta}{2 \Delta t}\right]_{\Delta t \equiv o} = \lim \left(\frac{r^2}{2} \frac{\sin \Delta \theta}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o}$$

$$+ \lim \left(\frac{r}{2} \Delta r \frac{\Delta \theta}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o};$$

mais

$$\lim \left(\frac{\sin \Delta \theta}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} = \frac{d\theta}{dt},$$

$$\lim \Delta r_{\ \Delta t \equiv o} = 0, \quad \lim \left(\frac{\Delta \theta}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} = \frac{d\theta}{dt};$$

donc $$\lim \left(\frac{\text{surface OMM}_1}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}.$$

52. Relations entre les composantes de la vitesse en coordonnées polaires et les composantes de la vitesse en coordonnées rectangulaires. — L'axe polaire étant l'axe des x, et le pôle à l'origine, il vient :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Ces relations, dérivées par rapport au temps, donnent :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \frac{d\theta}{dt} \sin \theta \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \frac{d\theta}{dt} \cos \theta \end{aligned}\right\} \text{I.}$$

et par suite :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dx}{dt} \cos \theta + \frac{dy}{dt} \sin \theta, \quad r \frac{d\theta}{dt} = \frac{dy}{dt} \cos \theta - \frac{dx}{dt} \sin \theta,$$

d'où l'on tire :

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}\left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right).$$

53. Des composantes de l'accélération en coordonnées polaires. — Les projections de l'accélération sur les axes sont $\frac{d^2x}{dt^2}$ et $\frac{d^2y}{dt^2}$. Pour les faire apparaître, dérivons une seconde fois les relations I; nous obtenons :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2} \cos\theta - 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} \sin\theta - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \cos\theta - r\frac{d^2\theta}{dt^2} \sin\theta,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2} \sin\theta + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} \cos\theta - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \sin\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2} \cos\theta.$$

La projection d'une résultante sur un axe étant la somme des projections des composantes, nous considérerons l'accélération comme résultante des accélérations énumérées ci-dessous :

1° Une accélération $\frac{d^2r}{dt^2}$ représentée par un vecteur qui fait les angles θ et $90° - \theta$ avec les axes OX et OY. Elle est dirigée suivant le rayon vecteur et constitue l'*accélération de glissement.*

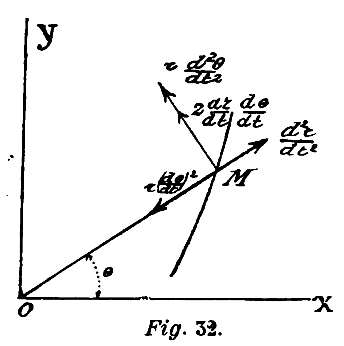


Fig. 32.

2° Une accélération $r \frac{d^2\theta}{dt^2}$ représentée par un vecteur qui a pour angles directeurs $90° + \theta$ et θ. Elle est perpendiculaire au rayon vecteur et s'obtient en dérivant par rapport au temps, l'expression $r \frac{d\theta}{dt}$ dans laquelle r est supposé constant; elle représente donc l'*accélération tangentielle de circulation.*

3° Une accélération $r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ essentiellement positive, figurée par un vecteur dont les angles directeurs sont $180° - \theta, 90° + \theta$. Elle est dirigée suivant le rayon vecteur et vers le pôle. C'est l'*accélération centripète de circulation.*

4° Une accélération qui a pour grandeur $2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}$; ses angles directeurs sont $90° + \theta$ et θ. Elle est perpendiculaire au rayon vecteur et on lui donne le nom d'*accélération complémentaire.*

Nous expliquerons son intervention dans le chapitre qui traite du mouvement relatif.

54. Mouvement dans l'espace. — *La position du mobile* M *est définie par les trois coordonnées* r, θ et φ, *fonctions du temps.*

L'angle θ, appelé la colatitude, croît positivement de l'axe positif OZ vers le plan XOY; φ, appelé longitude, croît positivement de OX positif vers OY positif.

A l'époque $t + \Delta t$, la position du mobile est M_1, ses coordonnées sont $r + \Delta r$, $\theta + \Delta\theta$, $\varphi + \Delta\varphi$. Or, on a :

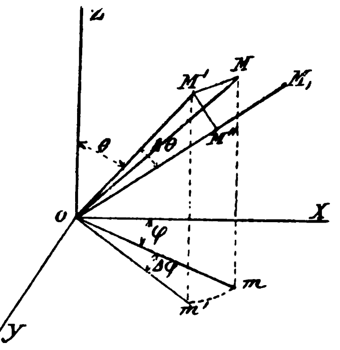


Fig. 33.

$$\overline{MM_1} = \overline{MM'} + \overline{M'M''} + \overline{M''M_1},$$

et par suite (4) :

$$\frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\overline{MM'}}{\Delta t} + \frac{\overline{M'M''}}{\Delta t} + \frac{\overline{M''M_1}}{\Delta t},$$

ce qui devient, en passant à la limite pour Δt convergeant vers zéro :

$$\lim \left(\frac{\overline{MM_1}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} = \lim \left(\frac{\overline{MM'}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} + \lim \left(\frac{\overline{M'M''}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} + \lim \left(\frac{\overline{M''M_1}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o}.$$

Mais,

$$MM' = 2\ Om' \sin \frac{\Delta\varphi}{2} = 2r \sin\theta \sin \frac{\Delta\varphi}{2},$$

$$\lim \left(\frac{MM'}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} = \lim \left(2r \sin\theta \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \frac{1}{2} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o}$$

$$= r \sin\theta \frac{d\varphi}{dt},$$

$$M'M'' = 2r \sin \frac{\Delta\varphi}{2}, \quad \lim \left(\frac{M'M''}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} = r \frac{d\theta}{dt},$$

$$M''M_1 = \Delta r, \; \lim \left(\frac{M''M_1}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} = \frac{dr}{dt}, \; \lim \left(\frac{MM_1}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} = \overline{V}.$$

De plus, les rapports géométriques

$$\lim \left(\frac{\overline{MM'}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o}, \; \lim \left(\frac{\overline{M'M''}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o}, \; \lim \left(\frac{\overline{M''M_1}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o},$$

dirigés suivant les tangentes en M aux arcs de circonférence MM′, M′M″ et suivant le rayon, sont perpendiculaires entre eux. La vitesse $\overline{V}$ est donc la diagonale d'un parallélépipède rectangle et nous avons la relation analytique :

$$V^2 = r^2 \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2;$$

$\frac{dr}{dt}$ est la projection de la vitesse sur le rayon vecteur ; on l'appelle *vitesse de glissement* suivant le rayon ;

$r \frac{d\theta}{dt}$, projection de la vitesse sur la normale au rayon vecteur dans le plan ZOM, est appelée *vitesse de circulation en colatitude* et $\frac{d\theta}{dt}$ est la *vitesse angulaire* dans ce mouvement ;

$r \sin \theta \frac{d\varphi}{dt}$, projection de la vitesse sur la perpendiculaire au plan ZOM, prend le nom de *vitesse de circulation en longitude* et $\frac{d\varphi}{dt}$ est la *vitesse angulaire correspondante.*

Les relations entre les projections des vitesses sur les axes rectangulaires et les projections précédentes, s'obtiennent en dérivant par rapport au temps, les formules de transformation de coordonnées.

55. **Définition.** — *On appelle vitesse aréolaire du mouvement par rapport à un axe, la vitesse aréolaire du mouvement projeté sur un plan perpendiculaire à l'axe, par rapport au pied de celui-ci.*

Prenons l'axe considéré pour axe OZ, le plan perpendiculaire comme plan XOY et le pied comme origine ; la vitesse aréolaire que nous venons de définir, a pour expression :

$$\frac{1}{2}\left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}\right).$$

56. Méthode de Roberval pour le tracé des tangentes. — *La méthode de Roberval est basée sur la propriété que possède la vitesse, d'être tangente à la trajectoire. On imagine un mobile qui parcourt cette courbe suivant une loi définie, et dont la vitesse se détermine en direction, par le rapport entre ses projections sur deux axes convenablement choisis. Ce rapport doit se déduire des propriétés de la courbe.*

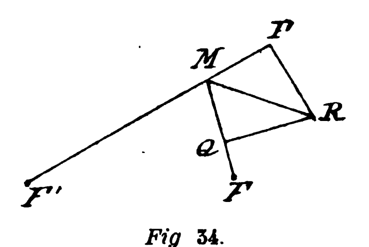


Fig 34.

Exemple. — Tangente au point M de l'ellipse, donnée par ses foyers F et F'. Désignons par r et r' les distances du point M aux foyers F et F'. Nous avons :

$$(1)\ r + r' = 2a.$$

Les projections orthogonales de la vitesse du mobile au point M, sur les rayons vecteurs FM et F'M, sont les vitesses de glissement par rapport aux foyers F et F'. Elles sont égales à $\frac{dr}{dt}$ et à $\frac{dr'}{dt}$. La relation (1), dérivée par rapport au temps, donne :

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{dr'}{dt};$$

les projections de la vitesse du point M sur les rayons vecteurs, sont donc égales et de signes contraires. Si nous représentons l'une d'elles par $\overline{MP}$, l'autre le sera par $\overline{MQ}$, égale en valeur absolue à la précédente. Les perpendiculaires élevées aux points P et Q sur les deux rayons vecteurs, déterminent par leur intersection le point R et par suite la tangente MR, bissectrice de l'angle PMQ.

CHAPITRE V

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DE LA LOI DU MOUVEMENT

57. Nous avons reconnu au nº 45 que la loi des espaces et ses dérivées successives, suffisent pour déterminer la position du mobile, sa vitesse et son accélération lorsque la trajectoire est connue. Il n'est pas toujours possible de trouver l'expression ana-

lytique de cette loi, si importante au point de vue du mouvement. Dans une étude expérimentale, par exemple, on n'obtient que les positions du mobile sur sa trajectoire à certaines époques. Ces résultats isolés permettent de représenter la loi du mouvement $s = f(t)$, avec une approximation souvent suffisante, au moyen d'une courbe appelée courbe des espaces.

Prenons deux axes rectangulaires et convenons de figurer les temps par les abscisses, les espaces par les ordonnées (*Fig.* 35). Le point O correspond à l'origine des temps, les époques antérieures ont des abscisses négatives, tandis qu'elles sont positives pour les époques postérieures. Une convention analogue est admise pour les espaces. Pour chacune des positions du mobile, existe un point dont les coordonnées sont obtenues en représentant l'unité de temps et l'unité d'espace par des longueurs u et u' généralement différentes, mais choisies de manière à rendre l'épure aussi claire que possible. Les points suffisamment rapprochés, indiqués sur le papier, sont réunis par un trait continu auquel on donne le nom de *courbe des espaces*. Elle est toute différente de la trajectoire, avec laquelle on ne peut la confondre. Dans certains cas il est possible d'en déduire l'expression analytique de la loi du mouvement. Exemple : l'appareil à indications continues de Morin pour l'étude de la chute des corps, décrit dans le cours de physique.

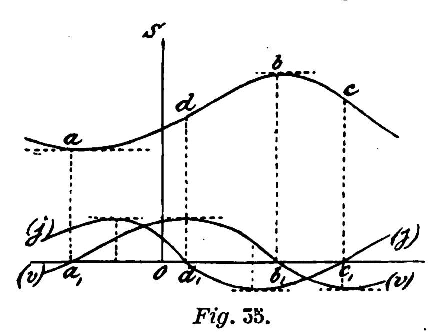


Fig. 35.

La relation $v = \frac{ds}{dt}$ conduit à la représentation graphique de la vitesse en chaque point de la courbe des espaces. Il suffit, par exemple, de mener la tangente au point m et de porter sur une parallèle à l'axe des temps, une longueur positive $mn = u$, pour trouver dans le triangle mnq, une droite nq donnant la vitesse à la même échelle que les espaces (*Fig.* 36).

En effet : $x = tu$, $y = su'$,
d'où :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{u'}{u}\frac{ds}{dt}, \quad \frac{ds}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{u}{u'}.$$

Mais dans le triangle rectangle *mnq*,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{nq}{u},$$

et par suite :

$$\frac{ds}{dt} = \frac{nq}{u'}.$$

la vitesse n'est donc égale à la valeur numérique du coefficient angulaire de la courbe des espaces, que si $u = u'$. Par cette construction, nous trouvons les ordonnées des points de la courbe des vitesses, pour des abscisses connues.

Fig. 36.

La courbe des accélérations tangentielles se déduit de la courbe des vitesses, comme celle-ci de la courbe des espaces.

Il existe entre ces courbes des relations analytiques qui conduisent à des propriétés cinématiques remarquables. Ainsi de *a* en *b*, l'espace augmente et passe de la valeur minimum aa_1 à la valeur maximum bb_1 ; le mobile s'est donc déplacé dans le sens positif, de la position A à la position B, avec une vitesse évidemment de même sens (*Fig.*35 et 37).

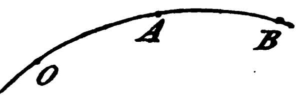


Fig. 37.

A partir de l'époque représentée par l'abscisse ob_1, les espaces diminuent, le mobile se meut en sens inverse et se rapproche de l'origine des espaces *o*, sa vitesse change de sens et de signe. Elle s'annule dans la position B qui se rapporte au point *b*. Le même fait existe pour A et *a*.

Les maximum et les minimum de la courbe des espaces, correspondent donc aux positions extrêmes du mobile sur sa trajectoire. En ces points la vitesse est nulle et sa grandeur devient maximum en valeur absolue, quand le mobile passe dans les positions définies par les points d'inflexion *d* et *c* de la courbe des espaces. Pour le premier, il y a maximum au sens analytique du mot, parce que la vitesse est positive, tandis qu'il y a minimum au point *c* pour lequel elle est négative.

De même, on prouve qu'aux maximum et minimum de la courbe

des vitesses, correspondent les positions du mobile pour lesquelles l'accélération tangentielle est nulle, et enfin que celle-ci est maximum en valeur absolue, aux points d'inflexion.

58. **Application au mouvement uniforme.** — Les équations du mouvement uniforme : $s = s_0 + at$, $v = a$. (*Fig.* 38) sont représentées par deux droites que l'on utilise dans le graphique des trains (*Fig.* 39). On donne ce nom à une épure qui détermine à chaque instant les positions simultanées des trains qui circulent sur la voie. Dans ce but on construit pour chacun d'eux la courbe des espaces. On prend pour origine la station tête de ligne, pour unités le kilomètre et l'heure ; les subdivisions de dix minutes, sont indiquées par un trait plus fin. Dans le tracé des courbes, le mouvement est supposé uniforme entre deux stations voisines, ce qui revient à remplacer pendant ce trajet, la vitesse réelle par la vitesse moyenne. La courbe des espaces devient une ligne brisée et les parties parallèles à l'axe des temps, mesurent les arrêts. On distingue à première vue le sens de la marche des trains, par les coefficients angulaires. Selon qu'ils sont de même signe ou de signes différents, les trains circulent dans le même sens ou en sens opposés.

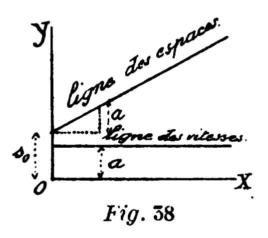


Fig. 38

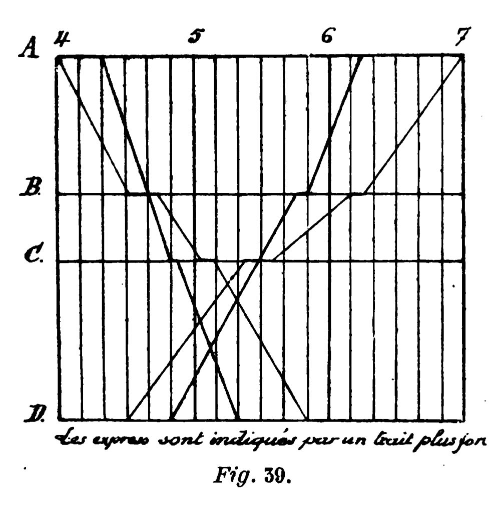


Fig. 39.

Lorsque l'exploitation se fait au moyen d'une simple voie, les graphiques doivent nécessairement se couper en des points dont les abscisses correspondent aux gares. Dans celles-ci existent des voies d'évitement, qui permettent de garer l'un des trains et de laisser la voie principale libre, pour le passage de l'autre. Cette obligation n'existe plus quand l'exploitation se fait par double

voie; on réserve l'une d'elles aux trains qui circulent dans un sens et l'autre aux trains qui vont en sens opposé. Les points de rencontre des graphiques qui ont des coefficients angulaires de même signe doivent seuls se rapporter à des gares (*Fig.* 39).

Le graphique des marches, imaginé par le général Lewal, est une application à la stratégie de la représentation précédente.

59. Les équations du mouvement uniformément varié (41) montrent que la courbe des espaces est une parabole, dont l'axe est parallèle à l'axe des s, tandis que la courbe des vitesses est une droite inclinée sur l'axe des temps, auquel la courbe des j est parallèle.

CHAPITRE VI

MOUVEMENTS SIMPLES DU CORPS SOLIDE

60. Le corps solide cinématique est un système de points dont les distances respectives sont invariables. Sa position dans l'espace est définie par les positions de trois de ses points, non en ligne droite. Il en est de même de son mouvement. La connaissance des lois du mouvement de ces trois points, suffit pour obtenir celles de tous les autres. Elles sont représentées analytiquement par des fonctions continues du temps, possédant des dérivées premières et secondes parfaitement déterminées.

Le corps solide cinématique est une fiction, car les solides naturels sont tous plus ou moins déformables, mais le plus souvent les déformations sont si faibles, qu'elles permettent l'application immédiate des résultats qui seront trouvés.

61. **Translation.** — *Un corps solide possède un mouvement de translation, quand tous ses points décrivent, pendant des temps contemporains, quelque petits qu'ils soient, des trajectoires égales dont les cordes sont équipollentes.*

Quelle que soit la nature des trajectoires au point de vue géométrique, les points qui les parcourent suivent une loi identique. Au même instant, ils ont tous même vitesse et même accélération, et le mouvement de l'un d'eux fait connaître celui du corps tout entier.

Si, à une certaine époque t, les vitesses des points d'un corps solide animé d'un mouvement quelconque, deviennent équipollentes, que les accélérations le soient ou non, on dit que le mouvement est une ***translation instantanée*** à l'instant considéré.

D'une manière générale, la translation se représente par la vitesse commune à tous les points du solide.

62. **Rotation.** — *Un solide possède un mouvement de rotation quand deux de ses points sont fixes. La droite qui les unit est appelée l'axe de la rotation.*

Par suite de la définition du corps solide, tous les points de l'axe de la rotation sont fixes, et les plus courtes distances des autres points du système à cette droite, sont constantes, de sorte qu'ils décrivent des circonférences, contenues dans des plans perpendiculaires à l'axe sur lequel se trouvent les centres.

Il arrive souvent que des points de l'axe où même celui-ci tout entier, n'existent pas en réalité dans le corps, bien que le mouvement se produise comme nous venons de l'indiquer. Dans cette hypothèse nous facilitons le raisonnement, en imaginant la droite, lieu des centres des circonférences, solidifiée et reliée invariablement au solide. C'est l'axe de la rotation.

Le mouvement de rotation jouit d'une propriété remarquable. Tous les points du corps décrivent pendant le même intervalle Δt, quelque petit qu'il soit, des arcs de circonférence dont les angles au centre sont égaux; car si cela n'était pas, les distances entre les points ne resteraient pas invariables. La vitesse angulaire $\frac{d\theta}{dt}$, conserve donc à chaque instant la même valeur pour le corps tout entier et ne dépend que du temps. *Elle est égale à la vitesse d'un point du solide placé à l'unité de distance de l'axe.* Si elle est constante, la rotation est uniforme.

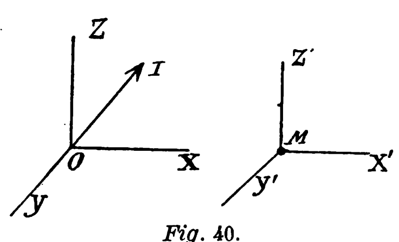


Fig. 40.

Pour représenter un mouvement de rotation, on porte sur l'axe à partir d'un point déterminé O, *pris comme origine, une longueur proportionnelle à la vitesse angulaire, dans un sens tel qu'un observateur placé les pieds en* O *et la tête à l'extrémité, voie le mouvement s'effectuer*

dans le sens de celui des aiguilles d'une montre (*Fig.* 40). Nous avons ainsi un vecteur entièrement défini.

Si, à une époque t, les vitesses des points d'un solide en mouvement, sont égales aux vitesses qu'ils posséderaient dans une rotation autour d'un certain axe fictif $\overline{OI}$, on dit que le mouvement est une *rotation instantanée* autour de l'*axe instantané* $\overline{OI}$. Elle se représente comme nous venons de l'indiquer.

63. Composantes suivant trois axes rectangulaires OX, OY, OZ, de la vitesse d'un point du solide qui tourne autour de OI. — *La vitesse* $\overline{V}$ *d'un point* M *du corps est égale au moment de l'axe de la rotation par rapport au point considéré, c'est ce qui résulte de la définition donnée au n° 11.*

Recherchons les projections de $\overline{V}$ sur trois axes rectangulaires issus du point O, pris pour origine de $\overline{OI}$. Elles sont égales aux projections sur trois axes parallèles aux précédents menés par le point M. Celles-ci s'obtiennent immédiatement, car la relation $\overline{V} = \overline{M_M OI}$ équivaut aux trois égalités de projection :

$$V_x' = M_x' OI, \quad V_y' = M_y' OI, \quad V_z' = M_z' OI.$$

Il est d'ailleurs démontré au n° 15 que :

$$M_x' OI = Zy - Yz, \quad M_y' OI = Xz - Zx, \quad M_z' OI = Yx - Xy.$$

Dans ces formules, X, Y, Z, sont les projections p, q, r de $\overline{OI}$ sur les axes MX'Y'Z', ou sur les axes parallèles OXYZ; x, y, z, sont les coordonnées x', y', z' du point O dans le système MX'Y'Z', de sorte que :

$$V_x' = ry' - qz', \quad V_y' = pz' - rx', \quad V_z' = qx' - py'.$$

Mais x', y', z' sont égales et de signes contraires aux coordonnées x, y, z du point M par rapport à OXYZ et, $V_x' = V_x$, $V_y' = V_y$, $V_z' = V_z$; donc :

$$V_x = qz - ry, \quad V_y = rx - pz, \quad V_z = py - qx.$$

Ce sont les mineurs du déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & p & x \\ 1 & q & y \\ 1 & r & z \end{vmatrix}$.

64. Les mouvements de translation rectiligne et de rotation sont d'une application constante dans l'industrie. Dans presque toutes les machines motrices on rencontre un piston animé d'un mouvement rectiligne alternatif, et un arbre de couche, tournant autour de son axe. Dans les machines outils les mouvements de rotation sont les plus fréquents, surtout depuis l'introduction de la fraise. Cela tient à la facilité avec laquelle on produit, on transmet et on modifie ces mouvements au moyen d'arbres, de poulies, d'engrenages, en même temps qu'à leur propriété d'être continus.

CHAPITRE VII

MOUVEMENT DU CORPS SOLIDE

65. Nous ramenons l'étude d'un mouvement quelconque du corps solide à celle des deux mouvements principaux de translation et de rotation, au moyen du théorème de Chasles, basé sur la conception des mouvements simultanés, à laquelle nous parvenons par des considérations de mouvement relatif, que nous allons exposer. Ainsi que nous l'avons déjà dit, le mouvement d'un corps s'obtient en rapportant sa position à celle d'un autre corps pris comme repère et qui est généralement réduit à trois axes rectangulaires.

Pour préciser les idées, admettons le corps en mouvement dans le système OXYZ, lequel possède par rapport au système servant de repère $O_1X_1Y_1Z_1$ un mouvement dit *d'entraînement*. L'observateur solidaire de OXYZ, aperçoit le mouvement *relatif*, encore appelé *apparent*, car il lui semble véritable. Un second observateur identifié avec $O_1X_1Y_1Z_1$ voit se produire le mouvement dit *absolu*. Nous pourrons le représenter en imaginant que le corps se meuve suivant la loi du mouvement relatif dans le système OXYZ, en même temps que celui-ci se trouve emporté dans le système $O_1X_1Y_1Z_1$, par suite du mouvement d'entraînement. Nous sommes ainsi amenés à envisager l'existence de deux mouvements simultanés : un mouvement d'entraînement et un mouvement relatif. Rien n'empêche d'en concevoir un plus grand nombre. Si nous admettons, par exemple, la mobilité du système $O_1X_1Y_1Z_1$, et si nous rapportons sa position à un troisième système, pris à son tour pour repère, nous arrivons à trois mouvements simultanés.

Nous reviendrons d'ailleurs sur ce point dans les paragraphes suivants; ce qui précède suffit pour comprendre le théorème de Chasles, tel qu'il a été formulé et démontré par M. De Tilly. (1)

66. **Théorème.** — *Lorsqu'on considère un corps solide dans deux positions différentes quelconques, il y a toujours dans ce solide une droite dont la position n'a pas changé et qui est placée comme si elle n'avait fait que glisser sur elle-même, de manière que le corps peut passer de la première position à la seconde par un mouvement héliçoïdal autour de cette droite comme axe. C'est l'axe central des deux positions du solide.*

Lorsqu'un corps solide passe d'une position à une autre, un point quelconque a, lié au corps, est remplacé, dans la position primitive qu'il occupait dans l'espace, par un autre point b ; le point b est remplacé dans la sienne par un point c, etc. ; donc, lorsqu'un corps solide passe d'une position à une autre position quelconque, il existe, pour chaque point a, appartenant au corps ou lié au corps, une ligne polygonale, plane ou gauche, abc..., qui revient dans sa position primitive après le déplacement, chaque sommet ayant avancé d'un rang. Je l'appellerai la ligne polygonale des positions successives, ou, pour abréger, la ligne des positions.

Cette ligne polygonale jouit, à cause de la coïncidence possible de ses diverses parties, des propriétés suivantes : ses côtés sont égaux entre eux, ainsi que ses angles ; de plus, si l'on mène tous les plans contenant deux côtés consécutifs, l'angle de deux plans consécutifs est constant (2).

Par un point quelconque de l'espace, menons des droites respectivement égales et parallèles aux côtés de la ligne polygonale des positions successives, et, de plus, dirigées dans le même sens que ces côtés, en suivant la ligne polygonale, de sommet en sommet, dans le sens abc..., par exemple. A cause des propriétés précédentes, nous formerons ainsi un angle solide régulier, si nous matérialisons, par la pensée, les plans des faces ; ou encore, en

(1) Sur l'axe central et l'axe instantané glissant, *Mathésis*, T. V, 1885.

(2) Je pourrais, dès à présent, faire intervenir l'axe de cette ligne polygonale régulière, mais je préfère établir directement l'existence de cet axe, en n'employant que les propriétés les plus élémentaires de la droite et du plan.

matérialisant également le plan de la base, nous formerons une pyramide régulière, dont la base pourra être étoilée, et pourra aussi ne pas se fermer.

Du centre de la base, menons des droites vers les différents sommets. Ces rayons seront les projections, sur le plan de la base, des arêtes de la pyramide, lesquelles sont des parallèles aux côtés de la ligne des positions successives.

Sur le même plan projetons ensuite, non plus les parallèles aux côtés de la ligne des positions, mais ces côtés eux-mêmes. Les projections seront respectivement parallèles et égales aux rayons dont nous venons de parler ; mais, au lieu de passer par un même point, elles se placeront bout à bout et constitueront donc un nouveau polygone régulier, qui pourra être étoilé et pourra aussi ne pas se fermer.

Ce polygone, projection de la ligne des positions, reste le même avant et après le déplacement, et son axe représente, après comme avant, la droite unique équidistante de tous les côtés de la ligne des positions. Cette droite unique, considérée comme liée au corps, revient donc sur elle-même après le déplacement.

Donc, si l'on considère un même corps solide dans deux positions différentes quelconques, il y a toujours, dans ce solide, une droite dont la position n'a pas changé et qui est placée comme si elle n'avait fait que glisser sur elle-même, de manière que le corps peut passer de la première position à la seconde par un mouvement hélicoïdal autour de cette droite comme axe. C'est l'axe central des deux positions du solide.

Si un point était donné immobile, l'axe central contiendrait nécessairement ce point et ne serait plus qu'un axe de rotation, la translation étant nulle.

67. Lorsqu'un solide passe d'une position à une autre, le déplacement rectiligne total d'un point quelconque est représenté par l'hypoténuse d'un triangle rectangle, dont un côté de l'angle droit est égal au déplacement commun de tous les points, par la translation le long de l'axe central, et dont l'autre côté est la corde de l'arc décrit par le point considéré, dans sa rotation autour du même axe. Donc, pour que les déplacements totaux de deux points soient égaux, il faut et il suffit que les cordes en question soient égales, et, comme l'angle au centre est le même pour tous les points, cette condition revient à celle de l'égalité des rayons,

c'est-à-dire que le lieu des points, dont le déplacement rectiligne total est égal à une longueur donnée, est un cylindre, dont l'axe de révolution coïncide avec l'axe central des deux positions du solide.

68. Par un point quelconque, menons des droites respectivement parallèles et égales à celles qui représentent les déplacements rectilignes totaux de tous les points du corps, et de plus, dirigées dans le même sens que ces déplacements. Toutes ces droites devront se projeter suivant une seule et même longueur sur l'axe central; donc les extrémités se trouveront toutes dans un même plan perpendiculaire à cet axe.

Cette remarque permet d'obtenir la direction de l'axe central, lorsque l'on connaît les déplacements totaux de trois points du corps.

69. Une fois que la direction de l'axe central est connue, la position de cet axe peut s'obtenir en construisant les triangles rectangles dont il est question au n° 67 et pour chacun desquels on connaît l'hypoténuse et la direction d'un côté de l'angle droit (parallèle à l'axe central). Par vérification, la longueur de ce côté sera la même dans tous les triangles. Dans chacun de ceux-ci, on mènera par le milieu du troisième côté (corde de l'arc décrit autour de l'axe central), un plan perpendiculaire à ce troisième côté. Tous les plans ainsi obtenus se couperont suivant une même droite, qui sera l'axe central cherché. La même construction donne l'amplitude des deux mouvements de translation et de rotation.

70. Considérons un même point du solide, qui soit en A dans la position initiale et en B dans la position finale. Le solide peut évidemment être amené, de la première position dans la seconde, par une translation rectiligne pure, amenant de A en B le point considéré (que j'appellerai, dans la suite, *point directeur)*, suivie d'un autre mouvement, dans lequel le point directeur ne changerait plus de place, et pour lequel on peut choisir, d'après ce qui précède, une rotation pure autour d'un axe BC.

71. Or le raisonnement du n° 68 s'applique, sans modification, aux axes de rotation, tels que BC, ainsi obtenus. Soit, en effet, A′ la position initiale d'un point quelconque, lequel est amené en B′

par la translation AB, et dont la position finale est C′. Il est évident que les points B′ et C′ se projettent en un seul et même point sur l'axe de rotation BC ; donc la projection du déplacement total A′C′, sur BC, est la même que celle de A′B′, ou de AB, sur le même axe. Ainsi les déplacements totaux de tous les points se projettent suivant une seule et même longueur sur l'axe BC. Donc la construction du nº 68 peut être employée pour trouver la direction de cet axe ; et, comme cette construction donne un résultat unique, on en conclut que les divers axes de rotation, obtenus en prenant les divers points du corps comme points directeurs, sont parallèles entre eux et à l'axe central.

72. De plus, il est facile de voir que les déplacements angulaires autour de chacun de ces axes sont tous égaux. En effet, considérons, dans la position initiale, une droite perpendiculaire à l'axe central et, dans la position finale, la droite homologue à la première. Soit α l'angle de ces droites homologues.

Amenons le solide, de la première position dans la seconde, par une translation empruntée à l'un quelconque des points, suivie de la rotation nécessaire. Pendant la translation, l'angle α reste invariable.

La rotation qui doit compléter le déplacement se fait autour d'un axe parallèle à l'axe central, donc perpendiculaire aux deux droites homologues, lesquelles font toujours entre elles l'angle α.

Or, cette rotation doit faire coïncider les droites homologues; donc le déplacement angulaire correspondra à l'angle α, c'est-à-dire qu'il sera indépendant du point choisi comme point directeur.

73. Le théorème de Chasles donne le moyen de faire passer un corps solide d'une première position dans une seconde, mais le mouvement qui lui est ainsi attribué est fictif. Pour passer au mouvement réel, nous ferons deux observations :

1º Les trajectoires que décriraient les points par suite de l'application du théorème de Chasles, diffèrent des trajectoires véritables;

2º Le temps nécessaire au mouvement n'a pas été considéré.

Ceci nous conduit à décomposer le déplacement réel du corps dans l'espace, en déplacements plus petits, au moyen de positions intermédiaires. Nous appliquerons alors le théorème de Chasles à chacun de ces déplacements particuliers, en tenant compte du temps réellement mis pour les effectuer.

Suivons un point m du corps pendant le temps Δt; sa position initiale est M_1 et sa position finale M_2. Le déplacement rectiligne total $\overline{M_1M_2}$ diffère de l'arc de trajectoire décrit pendant le temps Δt, puisqu'il en est la corde. Il est résultant de $\overline{M_1N}$, qui soustend l'arc de circonférence engendré dans le mouvement autour de l'axe central correspondant, et du déplacement $\overline{NM_2}$ produit par la translation parallèle à cet axe. C'est ce que nous exprimons par l'égalité géométrique :

$$\overline{M_1M_2} = \overline{M_1N} + \overline{NM_2}.$$

Fig. 41.

Divisons les deux membres par Δt, il vient :

$$\frac{\overline{M_1M_2}}{\Delta t} = \frac{\overline{M_1N}}{\Delta t} + \frac{\overline{NM_2}}{\Delta t}.$$

Par définition $\frac{\overline{M_1M_2}}{\Delta t}$ est la vitesse moyenne géométrique ; sa limite quand Δt tend vers zéro, est la vitesse réelle du point M à l'instant où il occupe la position M_1. De même $\frac{\overline{M_1N}}{\Delta t}$, $\frac{\overline{NM_2}}{\Delta t}$, sont les vitesses moyennes géométriques dans les mouvements fictifs indiqués par le théorème de Chasles. *La vitesse moyenne géométrique d'un point du corps est donc résultante des vitesses moyennes géométriques, dans chacun des déplacements fictifs que l'on suppose simultanés.*

Ces résultats sont indépendants de l'amplitude du déplacement. Lorsqu'il tend vers zéro en même temps que Δt, la vitesse moyenne converge, pour chaque point, vers la vitesse en M_1 qui en est la limite.

Celle-ci est parfaitement déterminée et comme elle doit pouvoir se déduire du double mouvement par rapport à la position limite de l'axe central, nous conclurons que cette position est aussi déterminée. Nous l'appelons l'*axe instantané glissant* à l'instant considéré, ce qui permet d'énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *La vitesse d'un point du corps à un instant quelconque, est résultante des vitesses simultanées qu'il posséderait dans chacun des mouvements indiqués par le théorème de Chasles, par rapport à l'axe instantané glissant contemporain.*

Dans ces conditions, le mouvement du corps dans l'espace est figuré par une succession de rotations et de translations simultanées et instantanées, par rapport à une suite continue d'axes instantanés glissants.

Appliquons le raisonnement précédent au mouvement d'un corps possédant un point fixe. L'axe instantané glissant devient un axe instantané de rotation et le mouvement se représente par une succession de rotations instantanées autour d'une suite continue d'axes instantanés, passant tous par le point fixe.

Le théorème énoncé ci-dessus s'applique aux accélérations aussi bien qu'aux vitesses, si l'on décompose le mouvement du corps en une translation d'entraînement le long des axes instantanés glissants successifs, et une rotation relative autour des mêmes axes ou inversement. Nous ne le démontrerons pas en ce moment, mais nous le déduirons ultérieurement d'une étude plus complète du mouvement relatif par le théorème de Coriolis, qui, à ce point de vue, viendra compléter le théorème de Chasles.

74. L'axe instantané se détermine en partant des vitesses, comme l'axe central en fonction des déplacements rectilignes totaux, car les équipollentes aux vitesses contemporaines des points du corps, menées par une même origine, ont leurs extrémités dans un plan perpendiculaire à l'axe considéré.

Suivant que le mouvement est une rotation ou une translation instantanée, le plan passe par l'origine ou se réduit à un point. En effet, les points de l'axe du corps, ont dans le premier cas des vitesses nulles, tandis que dans le second cas, toutes les vitesses sont égales.

75. **Cas particulier du mouvement d'une figure plane invariable, dans son plan.** — La position d'un pareil système résulte des positions occupées par deux de ses points; il en est de même de son mouvement. En faisant abstraction du cas particulier très simple d'une translation, nous pourrons énoncer le théorème suivant :

Théorème. — *Une figure plane indéformable se mouvant dans son plan, peut être amenée de sa position initiale à sa position finale, par une rotation autour d'un point du plan.*

La figure indéformable est assimilée à un corps solide et le

théorème de Chasles lui est applicable, de sorte que nous devons rechercher l'axe central des deux positions données. Il est perpendiculaire au plan du déplacement, car si cela n'était pas, la rotation, supposée différente de zéro, en ferait sortir la figure et la translation ne pourrait l'y ramener. Cette dernière ne peut d'ailleurs exister, elle transporterait la figure dans un plan parallèle au plan primitif. Le mouvement se réduit donc à une simple rotation autour du pied de l'axe, lequel devient un centre de rotation. Il a sa position déterminée, en menant les perpendiculaires aux milieux des déplacements rectilignes totaux de deux points du système.

Le raisonnement précédent subsiste, quelle que soit l'amplitude du déplacement. Lorsqu'il tend vers zéro en même temps que Δt, les perpendiculaires aux milieux des cordes deviennent à la limite, les normales aux positions contemporaines des points de la figure sur leurs trajectoires. Elles se rencontrent toutes en un point, qui est le *centre instantané de rotation* à l'instant considéré; il se trouve à l'intersection des normales aux positions contemporaines de deux points de la figure sur leurs trajectoires.

Il jouit de différentes propriétés :

1° La vitesse autour du centre instantané est égale pour chaque point, à la vitesse réelle contemporaine.

2° Les vitesses des points de la figure sont entre elles, comme les distances au centre instantané contemporain.

3° Les normales menées aux positions contemporaines des points de la figure sur leurs trajectoires, vont toutes concourir au centre instantané correspondant.

Sans explications nouvelles, nous pouvons représenter le mouvement d'une figure plane dans son plan, par une succession de rotations autour d'une suite continue de centres instantanés, obtenus en menant les normales aux positions contemporaines de deux points de la figure sur leurs trajectoires.

76. **Application.** — On donne un système formé de deux manivelles CM et C'M', réunies par une bielle MM' que l'on suppose dans le plan du papier. On demande le rapport entre les vitesses angulaires.

Soient ω et ω' les vitesses angulaires, v et v' les vitesses des points M et M' ; nous avons :

$$v = \omega CM, \quad v' = \omega' C'M',$$

mais le centre instantané est au point de rencontre I des normales menées aux positions contemporaines des points M et M′; donc :

$$\frac{\omega CM}{\omega' C'M'} = \frac{MI}{M'I},$$

ou

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{MI \times C'M'}{M'I \times CM}.$$

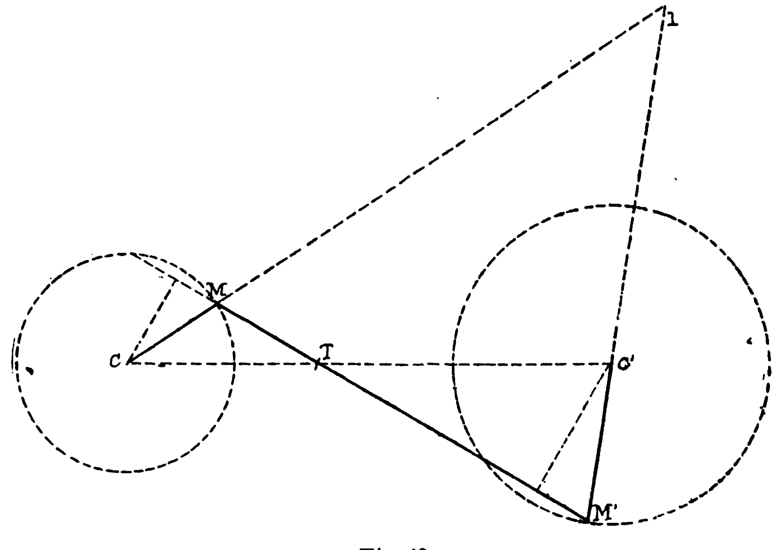


Fig. 42.

La sécante MTM′ rencontrant les trois côtés du triangle ICC′, donne, d'après la théorie des transversales :

$$CT \times IM \times C'M' = C'T \times CM \times IM',$$

par conséquent :

$$\frac{IM \times C'M'}{IM' \times CM} = \frac{C'T}{CT},$$

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{C'T}{CT}.$$

CHAPITRE VIII

MOUVEMENT RELATIF DU POINT

77. Considérons un point M, rapporté au système mobile OXYZ, lequel possède un mouvement d'entraînement relativement au système $O_1X_1Y_1Z_1$. Le mouvement du point, dans le système de comparaison OXYZ, est dit *relatif*. Son mouvement par rapport au système $O_1X_1Y_1Z_1$ est appelé *absolu;* enfin on donne le nom de *mouvement d'entraînement* du point, au mouvement qu'il prendrait par rapport au système fixe $O_1X_1Y_1Z_1$, si on le supposait rattaché invariablement au système mobile, à l'instant considéré. C'est ainsi que se déterminent la vitesse et l'accélération d'entraînement.

En reprenant le même ordre d'idées qu'au nº 65, nous pouvons concevoir le mouvement absolu du point, en imaginant qu'il décrive sa trajectoire relative solidifiée et reliée invariablement aux axes mobiles, en même temps que ceux-ci sont emportés dans le système fixe. De là l'existence de deux mouvements simultanés du point : le mouvement relatif et le mouvement d'entraînement.

Les relations qui existent entre eux et que nous allons rechercher, sont indépendantes de la fixité, attribuée quelquefois au système $O_1X_1Y_1Z_1$ et que nous définirons plus loin. Elles exigent simplement que celui-ci soit le système auquel nous rapportons en dernier lieu le mouvement.

Dans ces conditions, la trajectoire, la vitesse et l'accélération absolues, sont relatives au dernier système de comparaison. Nous n'attribuons en cinématique au mot *absolu*, que le sens qui vient d'être indiqué.

La théorie du mouvement relatif donne la solution de trois problèmes :.

1º Trouver le mouvement absolu, connaissant le mouvement d'entraînement et le mouvement relatif.

2º Trouver le mouvement relatif, connaissant le mouvement absolu et le mouvement d'entraînement.

3º Trouver le mouvement d'entraînement, connaissant le mouvement absolu et le mouvement relatif.

La solution du premier problème renferme celle des deux autres et doit faire connaître la position, la vitesse et l'accélération dans le mouvement absolu.

78. Trajectoire absolue. — Le mouvement relatif étant donné, il en est de même de la trajectoire relative. que nous supposons solidifiée et reliée invariablement aux axes OXYZ. A l'époque t, elle occupe la position AB par rapport à $O_1X_1Y_1Z_1$ et le mobile est en M. Le mouvement d'entraînement du système OXYZ la transporte en A'B' à l'époque $t + \Delta t$, ce qui peut se faire au moyen de deux mouvements : 1° Une translation d'entraînement MM', obtenue en prenant le point M du système mobile comme point directeur. Elle fait passer la trajectoire relative de AB en A''B''.

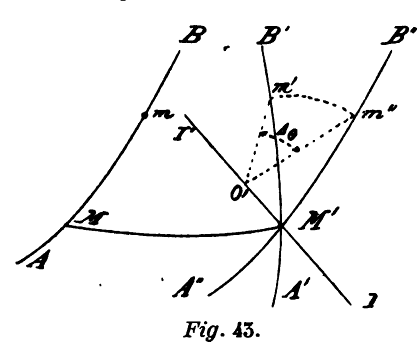


Fig. 43.

2° Une rotation d'entraînement autour d'un axe II' passant par le point M'. Elle amène la trajectoire dans sa position absolue et devient à la limite la rotation instantanée d'entraînement, si Δt converge vers zéro.

Pendant cet intervalle, le mobile est arrivé sur la trajectoire relative en m, de telle façon que sa position absolue est déterminée en prenant l'arc M'm' égal à Mm. La trajectoire absolue peut donc se construire par points.

79. Vitesse. — Par suite de la définition, la trajectoire MM' décrite pendant le temps Δt par le mobile relié invariablement au système OXYZ, est la *trajectoire d'entraînement ;* les cordes des arcs contemporains des trajectoires absolue, relative et d'entraînement sont $\overline{Mm'}$, $\overline{Mm}$, $\overline{MM'}$; si $\overline{V_a}$, $\overline{V_r}$, $\overline{V_e}$ sont les vitesses absolue, relative et d'entraînement, nous avons donc :

$$\overline{V_a} = \lim \left(\frac{\overline{Mm'}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o},$$

$$\overline{V_r} = \lim \left(\frac{\overline{Mm}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o}, \quad \overline{V_e} = \lim \left(\frac{\overline{MM'}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o};$$

Traçons les cordes $\overline{M'm'}$, $\overline{m''m'}$, il en résulte :

$$\overline{Mm'} = \overline{MM'} + \overline{M'm''} + \overline{m''m'}, \ (\textit{Fig. } 43).$$

d'où (4) :

$$\frac{\overline{Mm'}}{\Delta t} = \frac{\overline{MM'}}{\Delta t} + \frac{\overline{M'm''}}{\Delta t} + \frac{\overline{m''m'}}{\Delta t},$$

$$\lim \left(\frac{\overline{Mm'}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} = \lim \left(\frac{\overline{MM'}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} + \lim \left(\frac{\overline{M'm''}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} + \lim \left(\frac{\overline{m''m'}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o}.$$

Nous connaissons ces différents termes, à l'exception de $\lim \left(\frac{\overline{m''m'}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o}$.

Or, l'arc de circonférence $m''m'$, engendré dans la rotation d'entraînement autour de l'axe II', correspond à l'angle $\Delta\theta$; la corde $m''m'$ qui sous-tend cet arc, est égale à $2.\ O'm''.\ \sin\frac{\Delta\theta}{2}$ et le triangle $O'm''M'$ donne : $O'm'' = M'm'' \sin \widehat{O'M'm''}$.

On en déduit :

$$m''m' = 2M'm'' \sin (\widehat{O'M'm''}) \sin \frac{\Delta\theta}{2},$$

$$\lim \left(\frac{m''m'}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} = 2 \lim \left(\frac{M'm''}{\Delta t} \sin \widehat{O'M'm''} \sin \frac{\Delta\theta}{2}\right)_{\Delta t \equiv o}.$$

Mais :

$$\lim \left(\frac{M'm''}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} = \lim \left(\frac{Mm}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} = V_r,$$

$$\lim \left(\frac{\sin \Delta\theta}{2}\right)_{\Delta t \equiv o} = 0, \quad \lim \sin \left(\widehat{O'M'm''}\right)_{\Delta t \equiv o} = \sin \alpha$$

α désignant l'angle que fait à l'époque t, l'axe de la *rotation* instantanée d'entraînement avec la vitesse relative. La limite du rapport $\frac{\overline{m''m'}}{\Delta t}$ est donc nulle et par suite :

$$\overline{V_a} = \overline{V_e} + \overline{V_r},$$

d'où le théorème : *La vitesse absolue est résultante de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement.*

On en conclut que la *vitesse relative est résultante de la vitesse absolue et de la vitesse d'entraînement changée de sens.* Une remarque analogue s'applique à la vitesse d'entraînement.

80. Accélération. — Nous partirons de la valeur de l'accélération établie en fonction de la déviation au n° 49.

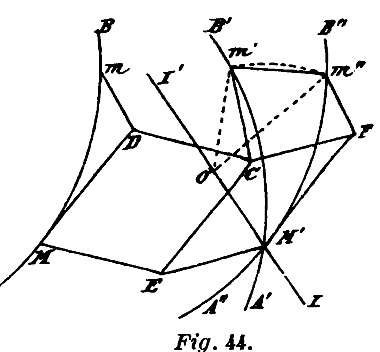


Fig. 44.

A cet effet portons sur la tangente en M à la trajectoire relative, une longueur $\overline{\text{MD}} = \overline{\text{V}_r\,\Delta t}$; la droite $\overline{\text{D}m}$ est la déviation relative du point, de l'époque t à l'époque $t + \Delta t$.

De même si $\overline{\text{ME}} = \overline{\text{V}_e\,\Delta t}$, la droite $\overline{\text{EM}'}$ est la déviation d'entraînement. (*Fig.* 44).

Or, la résultante de $\overline{\text{MD}}$ et de $\overline{\text{ME}}$ est une droite $\overline{\text{MC}}$, telle que :

$$\overline{\text{MC}} = \overline{\text{V}_r\,\Delta t} + \overline{\text{V}_e\,\Delta t},$$

et :

$$\overline{\text{V}_a} = \overline{\text{V}_r} + \overline{\text{V}_e} \quad (79)$$

par suite : $\overline{\text{MC}} = \overline{\text{V}_a\,\Delta t}$

et la déviation absolue est $\overline{\text{C}m'}$.

Il existe une relation géométrique entre ces déviations.

En effet, la translation d'entraînement transporte la figure MDm parallèlement à elle-même en M'Fm''. Joignons $\overline{\text{CF}}$, $\overline{m''m'}$, et considérons le quadrilatère CF$m''m'$ dans lequel

$$\overline{\text{CF}} = \overline{\text{EM}'},\ \overline{\text{F}m''} = \overline{\text{D}m}.$$

Il vient :

$$\overline{\text{C}m'} = \overline{\text{CF}} + \overline{\text{F}m''} + \overline{m''m'}$$

et de là :

$$2\,\frac{\overline{\text{C}m'}}{\Delta t^2} = 2\,\frac{\overline{\text{CF}}}{\Delta t^2} + 2\,\frac{\overline{\text{F}m''}}{\Delta t^2} + 2\,\frac{\overline{m''m'}}{\Delta t^2},$$

$$\lim 2\left(\frac{\overline{\text{C}m'}}{\Delta t^2}\right)_{\Delta t \equiv o} = \lim 2\left(\frac{\overline{\text{CF}}}{\Delta t^2}\right)_{\Delta t \equiv o} + \lim 2\left(\frac{\overline{\text{F}m''}}{\Delta t^2}\right)_{\Delta t \equiv o} + \lim 2\left(\frac{\overline{m''m'}}{\Delta t^2}\right)_{\Delta t \equiv o}.$$

Or, $\lim 2\left(\frac{\overline{\text{C}m'}}{\Delta t^2}\right)_{\Delta t \equiv o}$, $\lim 2\left(\frac{\overline{\text{CF}}}{\Delta t^2}\right)_{\Delta t \equiv o}$, $\lim 2\left(\frac{\overline{\text{F}m''}}{\Delta t^2}\right)_{\Delta t \equiv o}$,

sont les accélérations absolue, d'entraînement et relative (49); il reste à déterminer $\lim 2 \left(\frac{\overline{m''m'}}{\Delta t^2}\right)_{\Delta t \equiv o}$, appelée *accélération complémentaire* et indiquée par la notation $\overline{J}_{cp}$. Elle provient de la rotation instantanée d'entraînement et $\omega = \lim \left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o}$ (*Fig.* 43) est la vitesse angulaire d'entraînement. Nous avons donc :

$$\overline{J}_{cp} = \lim 2 \left(\frac{\overline{M'm''}}{\Delta t} \, \frac{\sin \frac{\Delta\theta}{2}}{\frac{\Delta\theta}{2}} \, \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \sin \widehat{O'M'm''} \right)_{\Delta t \equiv o} = 2 \, V_r \, \omega \sin \alpha.$$

La direction et le sens de $\overline{J}_{cp}$ sont ceux de la droite $\overline{m''m'}$, lorsqu'on passe à la limite. Dans cette position particulière, $\overline{m''m'}$ est perpendiculaire à l'axe instantané et à la vitesse relative; elle a le sens dans lequel se déplace, par suite de la rotation instantanée, l'extrémité du vecteur équipollent à la vitesse relative.

De là le théorème de Coriolis : *L'accélération absolue est résultante de l'accélération relative, de l'accélération d'entraînement et d'une accélération complémentaire égale à* $2\,\omega\,V_r \sin \alpha$; *celle-ci est perpendiculaire au plan déterminé par la vitesse relative et par l'axe de la rotation instantanée d'entraînement; elle a le sens du déplacement donné par cette rotation, à la pointe d'une aiguille disposée suivant la vitesse relative.*

81. Menons par le point O des équipollentes $\overline{OI}$ et $\overline{OP}$, à l'axe de la rotation instantanée et au double de la vitesse relative. Il est facile de voir que la vitesse imprimée au point P par la rotation instantanée $\overline{OI}$ est équipollente à l'accélération complémentaire. Ses projections sur les axes mobiles sont données par les formules du n° 63, dans lesquelles les coordonnées x, y, z, du point P valent $2\,V r_x$, $2\,V r_y$, $2\,V r_z$, c'est-à-dire :

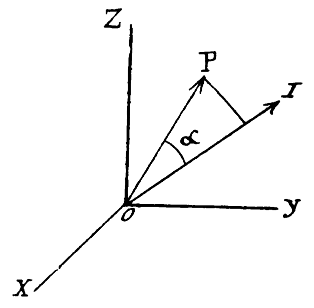


Fig 43.

$$2\,\frac{dx}{dt}, \quad 2\,\frac{dy}{dt}, \quad 2\,\frac{dz}{dt},$$

x, y, z, représentant maintenant les coordonnées du point M dont la vitesse relative est $\overline{V}_r$.

Les projections de l'accélération complémentaire sur les axes mobiles, sont donc :

$$2\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right),\quad 2\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right),\quad 2\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right).$$

En appliquant ces formules, on tiendra compte du sens positif des axes. Il est tel, que la rotation autour de OZ positif amène OX positif vers OY positif, par le plus petit déplacement angulaire et de même pour les rotations autour de OX et de OY, par permutation tournante.

82. L'accélération complémentaire disparaît dans trois cas :

1° Lorsque le mouvement d'entraînement est une translation instantanée ($\omega = 0$);

2° Dans l'hypothèse d'un repos relatif instantané $(\overline{V}_r = 0)$;

3° Lorsque l'axe de la rotation instantanée est parallèle à la vitesse relative ($\alpha = 0$ ou $180°$).

Nous avons déjà parlé de l'accélération complémentaire dans l'étude du mouvement par les coordonnées polaires (n° 53). Son intervention s'explique, du moment que l'on considère le glissement le long du rayon vecteur comme mouvement relatif, et le mouvement de circulation, comme étant d'entraînement.

Remarque. — Le troisième problème du n° 77 ne peut être entièrement résolu. Il est généralement impossible de déterminer la position des axes, la vitesse et l'accélération d'entraînement. A chaque position du point M sur la trajectoire absolue, correspondent une infinité de positions possibles du système OXYZ, car toute rotation imprimée à celui-ci, autour d'un axe passant par M, laisse au point la même trajectoire absolue et la même trajectoire relative.

Il n'en est plus ainsi, quand le mouvement d'entraînement se réduit à une translation, ou bien si l'origine des axes mobiles est fixe. Dans ces deux cas, on arrive facilement à la solution complète de la question, parce que l'on connaît, soit la direction, soit l'origine des axes mobiles. Reprenons par exemple le théorème de Chasles, appliqué aux axes instantanés glissants, en considérant un système d'axes mobiles qui ait à chaque instant la même translation que le corps par rapport aux axes fixes $O_1X_1Y_1Z_1$, mais qui n'ait aucune rotation. Le premier mouvement sera le mouve-

ment d'entraînement et la rotation sera relative au système OXYZ; dans ces conditions $\overline{J}_{cp}$ est nulle, puisque $\omega = 0$ et l'on a : $\overline{V}_a = \overline{V}_r + \overline{V}_e$, $\overline{J}_a = \overline{J}_r + \overline{J}_e$, équations qui peuvent être résolues effectivement et sans restriction par rapport à un quelconque de leurs termes.

83. Le mouvement relatif rend compte de nombreux phénomènes astronomiques parmi lesquels nous citerons : le mouvement apparent du soleil et des étoiles, l'aberration de la lumière, les éclipses, etc. Il intervient en mécanique appliquée dans la théorie des turbines, des pompes centrifuges et des ventilateurs.

CHAPITRE IX

§ 1. *Composition des mouvements simultanés du point*

84. Un mobile n'occupe par rapport à un système de comparaison qu'une seule position, ne décrit qu'une trajectoire et ne possède qu'une vitesse; ce n'est que par la conception de systèmes de comparaison successifs, que l'on arrive à imaginer des mouvements simultanés. Les exemples à l'appui de cette thèse sont nombreux. Citons une bille qui se déplace sur le plancher d'un wagon mobile à la surface de la terre, que nous prenons pour dernier système de comparaison.

De là deux mouvements simultanés : un mouvement relatif au wagon pris comme repère ; un mouvement d'entraînement, conséquence du déplacement du wagon par rapport à la terre.

Un observateur solidaire de cette planète, attribue à la bille un seul mouvement, produit par la composition des mouvements précédents.

En général, un point se déplace dans un système de comparaison S, celui-ci est mobile par rapport au système S', lequel est à son tour rapporté au système S'' et ainsi de suite, jusqu'au dernier système. Les mouvements simultanés que nous imaginons ainsi, sont appelés ***mouvements composants***; le mouvement par rapport au dernier système de comparaison prend le nom de mouvement ***résultant***; les vitesses correspondantes sont dites ***vitesses composantes*** et ***vitesse résultante***.

85. Théorème. — ***La vitesse résultante est égale à la somme géométrique des vitesses composantes.***

Soient $\overline{V}$, $\overline{V'}$, $\overline{V''}$, les vitesses simultanées du point. Elles seront considérées, la première comme relative au système de comparaison S, la seconde comme vitesse d'entraînement provenant du mouvement de S par rapport à S′, et enfin la troisième $\overline{V''}$ comme due au mouvement de S′ par rapport à S″. La vitesse $\overline{V'_a}$ du point par rapport au système S′ est égale à $\overline{V} + \overline{V'}$ (n° 79).

Les trois vitesses simultanées sont donc réduites aux deux vitesses $\overline{V'_a}$ et V'' qui proviennent du mouvement relatif à S′ et du mouvement d'entraînement de S′ par rapport à S″.

La vitesse résultante est relative à ce dernier système et elle est égale à :

$$\overline{V_a} + \overline{V''} = \overline{V} + \overline{V'} + \overline{V''},$$

en vertu du théorème qui vient d'être cité.

Tout ce qui est dit au n° 6, s'applique donc aux vitesses.

Si l'on propose le problème inverse, il faut rechercher les vitesses simultanées de directions connues, qui ont pour résultante la vitesse donnée. Il suffit de se reporter au n° 7, pour obtenir la solution.

86. Théorème. — ***L'accélération d'un point dans le mouvement résultant est la somme géométrique des accélérations qu'il possède dans les mouvements composants et des accélérations complémentaires correspondantes aux systèmes de comparaison considérés.***

Reprenons les notations des numéros précédents. Par suite du théorème de Coriolis, l'accélération $\overline{J'_a}$ du point dans son mouvement par rapport au système S′, est résultante de l'accélération $\overline{J}$ dans le mouvement relatif au système S, de l'accélération $\overline{J'}$ dans le mouvement d'entraînement de S par rapport à S′, et d'une accélération complémentaire J'_{cp}. En vertu du même théorème, l'accélération dans le mouvement par rapport au système S″, est résultante de $\overline{J'_a}$, de l'accélération $\overline{J''}$ dans le mouvement d'entraînement de S′ par rapport à S″, et d'une accélération complémentaire $\overline{J''_{cp}}$. Nous en concluons que l'accélération résultante est égale à $\overline{J'_a} + \overline{J''} + \overline{J''_{cp}}$ et vaut $\overline{J} + \overline{J'} + \overline{J''} + \overline{J'_{cp}} + \overline{J''_{cp}}$, ce que nous représentons d'une manière abrégée par $\Sigma\overline{J} + \Sigma\overline{J_{cp}}$.

§ 2. *Composition des mouvements simultanés du corps solide*

87. Nous ne considérons dans ce paragraphe que les vitesses, et nous ne faisons pas intervenir les accélérations ; cette convention permet d'appliquer les résultats trouvés aux translations et aux rotations instantanées aussi bien qu'aux translations et rotations continues ; mais elle conduit à une représentation incomplète du mouvement, parce que l'équivalence que nous établirons entre divers systèmes de translations et de rotations n'existe que sous le rapport des vitesses et non sous le rapport des accélérations.

I. Composition des mouvements de translation. — *Les translations simultanées se composent en une translation unique, dont la vitesse est résultante des vitesses des translations composantes.*

En effet les points du corps possèdent à chaque instant les mêmes vitesses simultanées, et par suite, la même vitesse résultante $\Sigma\bar{v}$. C'est la vitesse par rapport au dernier système de comparaison supposé fixe. Il suit de là que le mouvement résultant est une translation. (61)

88. **Système de rotations.** — *Lorqu'un solide est animé de plusieurs rotations simultanées, on dit qu'elles forment système.*

Deux systèmes de rotations sont appelés équivalents, quand ils donnent des vitesses identiques aux mêmes points du solide qui les possède, de façon que l'un peut être substitué à l'autre, au point de vue des vitesses.

Théorème de l'équivalence. — *Deux systèmes de rotations sont équivalents, quand les systèmes de vecteurs formés par les axes sont équivalents.*

Nous savons, en effet, que les vitesses simultanées communiquées à un point du corps par les différentes rotations, sont représentées par les moments des axes correspondants, par rapport au point considéré. La vitesse résultante est donc équipollente au moment résultant du système de vecteurs formé par les axes, par rapport au même point ; ce qui prouve l'équivalence des systèmes de rotations.

89. Ce théorème très important permet d'appliquer, à la composition des rotations simultanées, toutes les propriétés des systèmes de vecteurs, sans qu'il soit nécessaire de faire intervenir les systèmes de comparaison qui conduisent à l'existence de ces mouvements. Nous énoncerons donc sans démonstration, les propriétés suivantes :

1° *Le mouvement résultant d'un nombre quelconque de rotations simultanées s'effectuant autour d'axes concourant au même point, est une rotation autour de l'axe résultant des axes des rotations composantes.*

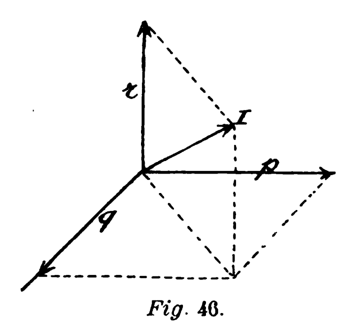


Fig. 46.

Ceci nous conduit à considérer les quantités p, q, r, intervenues dans l'étude du mouvement de rotation du corps solide (n° 63), comme représentant les trois rotations simultanées autour des axes rectangulaires qui composent la rotation donnée.

Réciproquement, toute rotation est décomposable en rotations simultanées autour d'axes qui concourent en un même point avec l'axe de la rotation proposée. Nous répéterons, à ce sujet, ce qui est dit au n° 7.

90. Un système de rotations qui a ses axes parallèles, se remplace par une rotation unique dont l'axe est la résultante des axes des rotations composantes. Il est parallèle à ceux-ci, égal à leur somme algébrique et les résultats trouvés au n° 30 sont applicables.

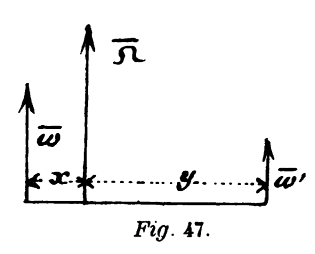


Fig. 47.

1° *En particulier deux rotations simultanées, parallèles et de même sens, se composent en une rotation dont l'axe est la résultante des axes donnés, leur est parallèle, de même sens, égal à leur somme, et se trouve dans une position telle qu'il divise leur plus courte distance, en deux segments inversement proportionnels aux axes.*

Donc :

$$\Omega = \omega + \omega', \quad x + y = d, \quad \frac{\omega}{\omega'} = \frac{y}{x}.$$

2° *Deux rotations simultanées parallèles et de sens contraires, se composent en une rotation dont l'axe est la résultante des axes donnés, leur est parallèle, égal à leur différence et a le sens du plus grand. Sa position est telle que sa direction détermine sur la plus courte distance des deux axes, prolongée du côté du plus grand, deux segments inversement proportionnels aux axes.*

Donc :

$$\Omega = \omega - \omega', \quad y - x = d, \quad \frac{\omega}{\omega'} = \frac{y}{x}.$$

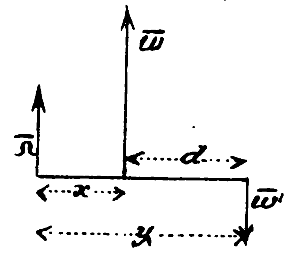


Fig. 48.

91. Dans l'hypothèse $\omega = \omega'$, ce système se transforme en un couple de rotations; la rotation résultante est nulle et son axe est transporté à l'infini. Ce résultat singulier concorde avec ce que nous avons trouvé dans la théorie vectorielle, car le couple qui a son moment résultant constant par rapport à tous les points de l'espace, communique une même vitesse aux points du solide. Le mouvement résultant est donc une translation, d'où le théorème :

Un couple de rotations équivaut à une translation dont la vitesse est équipollente à l'axe du couple.

Nous conservons toutes les notations admises pour les couples de droites, de sorte que d est le bras du levier, ωd le moment. Les couples de rotations possèdent les propriétés indiquées au n° 21, et que nous rappelons par le théorème suivant :

Un couple de rotations peut être transporté et orienté d'une manière quelconque dans son plan ou dans tout autre plan parallèle, en prenant à volonté ω *et* d, *à condition que le moment ne varie pas.*

92. Toute rotation d'un corps solide est équivalente à deux mouvements simultanés, savoir : une rotation égale dont l'axe passe par un point quelconque O, et une translation de vitesse équipollente au moment de l'axe de la rotation primitive, par rapport au point donné (n° 26).

De là le cas général :

Un système de translations et de rotations simultanées possé-

dées par un solide, est équivalent à une infinité de systèmes, formés d'une translation et d'une rotation, dont l'axe passe par un point déterminé, ou de deux rotations dont l'une a son axe passant par ce point et peut avoir une direction fixée d'avance **(nº 26).**

L'axe de la rotation étant résultant des axes des rotations simultanées, est indépendant du point par lequel on le fait passer. Il n'en est pas de même de la translation. Elle est résultante des translations données et de celles qui sont nécessaires pour effectuer le transport des axes de rotation, au centre de réduction. Elle dépend de la position de ce point, que l'on peut prendre de façon à rendre la translation parallèle à l'axe de la rotation. Nous retombons donc sur l'axe instantané glissant, auquel nous reconnaissons les propriétés de l'axe central (nº 28).

Dans ce cas particulier, la représentation du mouvement s'applique aussi aux accélérations (73), mais en général elle ne convient qu'aux vitesses. Pour passer aux accélérations, il faut tenir compte des accélérations complémentaires nécessitées par la considération des mouvements simultanés (80).

93. Les mouvements simultanés, tels que nous les avons définis, se présentent fréquemment dans l'industrie. Ils permettent de réaliser les mouvements si compliqués, que l'on demande parfois à l'outil, par la seule combinaison de translations et de rotations, c'est-à-dire de mouvements que l'on produit facilement en pratique.

CHAPITRE X

§ 1. *Glissement et roulement*

94. Du glissement. — ***Une courbe mobile glisse sur une courbe fixe, quand elle se déplace de manière à conserver avec celle-ci un point commun.***

Le glissement simple est celui qui se produit quand le même point de la courbe mobile, vient en coïncidence avec les points consécutifs de la courbe fixe ; il est mixte dans les autres cas, et il prend le nom de tangentiel, quand les deux courbes ont et conservent une tangente commune.

La droite formée en joignant à l'instant final de l'intervalle Δt,

les points des deux courbes qui coïncidaient à l'instant initial, est appelée le glissement géométrique pendant ce temps.

Nous entendons par vitesse de glissement, la limite du rapport du glissement géométrique au temps correspondant, lorsque celui-ci converge vers zéro.

95. **Théorème.** — *La vitesse de glissement est résultante de la vitesse du point de coïncidence sur la courbe fixe et de la vitesse changée de sens, du point de coïncidence sur la courbe mobile. Elle se trouve dans le plan tangent à l'intersection des deux courbes.*

Soit MN la courbe mobile qui glisse sur la courbe fixe AB.

Le point de coïncidence passe de la position a à l'époque t, à la position b à l'époque $t + \Delta t$, pour laquelle la courbe MN et le point a ont pris les positions M'N' et a'. Par suite de la définition, le glissement géométrique correspondant est $\overline{aa'}$.

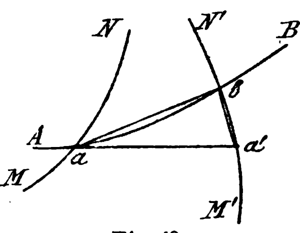


Fig. 49.

Désignons par $\overline{V}$, $\overline{v}$, $\overline{V}_g$, les vitesses du point de coïncidence sur les courbes AB et MN, ainsi que la vitesse de glissement. Nous avons :

$$\overline{V} = \lim\left(\frac{\overline{ab}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o}, \quad \overline{v} = \lim\left(\frac{\overline{a'b}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o},$$

$$\overline{V}_g = \lim\left(\frac{\overline{aa'}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o}.$$

Traçons les cordes ab et $\overline{a'b}$, il vient :

$$\overline{ab} = \overline{aa'} + \overline{a'b}$$

et par suite :

$$\lim\left(\frac{\overline{ab}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} = \lim\left(\frac{\overline{aa'}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} + \lim\left(\frac{\overline{a'b}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o}$$

Par conséquent :

$$\overline{V} = \overline{V}_g + \overline{v}, \text{ ou } \overline{V}_g = \overline{V} - \overline{v}.$$

Mais $\overline{V}$ est tangent à la courbe AB au point a, $\overline{v}$ est tangent à la courbe MN au même point ; donc la vitesse de glissement se trouve dans le plan tangent à l'intersection des deux courbes.

Si le glissement est tangentiel, les trois vitesses $\overline{V}$, $\overline{v}$, $\overline{V}_g$, sont dirigées suivant la tangente commune et la vitesse devient une différence algébrique.

Enfin s'il est simple, la vitesse du point de contact sur la courbe mobile est nulle, et la vitesse de glissement se confond avec la vitesse du point de contact sur la courbe fixe.

96. Du roulement. — *On dit qu'une courbe mobile roule sur une courbe fixe, quand elles conservent une tangente commune pendant le mouvement et que la vitesse de glissement est nulle.* Dans ces conditions $\overline{V} = \overline{v}$ et les arcs contemporains décrits sur chacune des courbes par le point de contact sont égaux. De là cette définition : *Une courbe mobile roule sur une courbe fixe, lorsque tout en lui restant constamment tangente, ses éléments distincts et consécutifs, viennent en contact avec des éléments distincts, consécutifs et de même grandeur de la courbe fixe.*

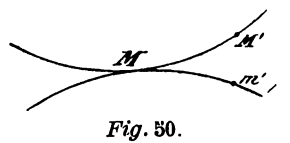


Fig. 50.

Si donc M est le point de contact actuel, M′ et m' les points qui seront en contact un Δt plus tard, on a :

$$\text{arc MM}' \text{ rectifié} = \text{arc M}m' \text{ rectifié}.$$

Théorème de Descartes. — *Quand une courbe mobile roule sur une courbe fixe, le centre instantané de rotation est à chaque instant le point de contact des deux courbes, et la vitesse angulaire dans la rotation instantanée, est liée à la vitesse du point de contact, par la relation* $\omega = v\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$, *dans laquelle* R *et* R′ *sont les rayons de courbure des deux courbes au point de contact.*

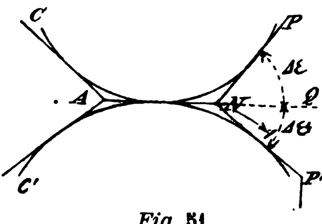


Fig. 51.

A l'époque t, les deux courbes étant en C et en C′, nous leur circonscrirons les deux polygones ANP..., ANP′, tels qu'ils aient à l'instant considéré le côté AN commun, et que les côtés de l'un soient égaux successivement aux côtés correspondants de l'autre. Faisons rouler ces polygones l'un sur l'autre, au lieu de faire rouler les courbes. Par suite du

mouvement qui se fait dans le sens indiqué par la flèche, le côté NP viendra coïncider avec le côté NP′. Ce déplacement s'effectue par une simple rotation autour du sommet N, puisque ce point reste immobile. Le raisonnement est vrai, quelque petits que soient les côtés des polygones; à la limite ceux-ci deviennent des courbes, les côtés deviennent des points et la rotation, instantanée cette fois, se fait autour du point de contact contemporain. Sa vitesse angulaire est donnée par la relation :

$$\omega = \lim \left(\frac{\text{angle PNP}'}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} = \lim \left(\frac{\text{angle PNQ}}{\Delta t} + \frac{\text{angle QNP}'}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o}$$

Or :

$$\lim \left(\frac{\text{angle PNQ}}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} = \lim \left(\frac{\text{angle PNQ}}{\Delta S}\,\frac{\Delta S}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} = \frac{d\varepsilon}{ds}\,\frac{ds}{dt},$$

$$\lim \left(\frac{\text{angle QNP}'}{\Delta t}\right)_{\Delta t \equiv o} = \frac{d\varepsilon'}{ds'}\,\frac{ds'}{dt}, \text{ et : } \frac{d\varepsilon}{ds} = \frac{1}{R}, \quad \frac{d\varepsilon'}{ds'} = \frac{1}{R'},$$

par conséquent :

$$\omega = \frac{1}{R}\,\frac{ds}{dt} + \frac{1}{R'}\,\frac{ds'}{dt}.$$

Mais il s'agit d'un roulement; la vitesse du point de contact sur la courbe C est donc égale à la vitesse du point de contact sur la courbe C′ et $\frac{ds}{dt} = \frac{ds'}{dt} = v$,
d'où l'on tire :

$$\omega = v\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

97. Glissement et roulement des surfaces quelconques. — *Une surface mobile glisse tangentiellement sur une surface fixe, quand elle se déplace en lui restant constamment tangente.* Les points qui viennent en contact forment généralement deux courbes : l'une qui est mobile, glisse sur l'autre qui est fixe. Ce glissement détermine la nature de celui des surfaces.

La surface mobile roule sur la surface fixe, quand la courbe mobile roule sur la courbe fixe. Dans ce mouvement, le point de contact des courbes est un point de vitesse nulle et il y a rotation instantanée autour d'un axe passant par ce point (73). S'il arrive que les surfaces aient deux points de contact, ceux-ci déterminent l'axe instantané; tel est le cas d'un cône roulant sur un autre cône de même sommet; l'axe instantané est la génératrice de contact.

98. Du pivotement. — *On dit qu'il y a pivotement, quand les surfaces des deux corps sont tangentes et conservent le même point de contact pendant toute la suite du mouvement; celui-ci se réduit à une rotation autour de la normale commune.*

§ 2. *Représentation géométrique du mouvement d'un corps solide*

99. Mouvement d'une figure plane dans son plan. — On représente le mouvement d'une figure plane dans son plan par une suite de rotations instantanées autour d'une série continue de centres instantanés C, C′, C″,... dont le lieu est une courbe fixe *f* dans le plan. Les points de la figure *c, c′, c″*,... ou tout au moins les points reliés invariablement à la figure, qui viennent successivement en coïncidence avec C, C′, C″, ... constituent une courbe mobile *m*, roulant sur la courbe *f*.

Nous aurons donc le mouvement, en supposant la figure liée invariablement à la courbe *m*, qui roule sur la courbe fixe *f*. Le point de contact des deux courbes est le centre instantané de rotation, et la vitesse angulaire correspondante s'obtient par la formule $\omega = v\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$ (96).

100. Application. — Représenter le mouvement d'une droite de longueur invariable dont les extrémités s'appuient sur deux axes rectangulaires.

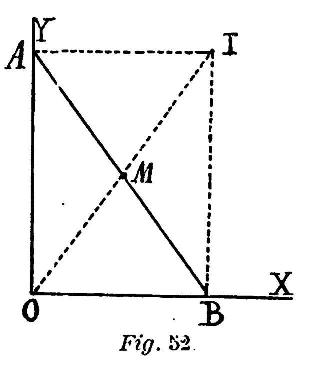


Fig. 52.

Soient OXY les axes fixes, OX, OY les trajectoires des extrémités. Le centre instantané I est au point de rencontre des normales aux positions contemporaines de ces deux points, c'est-à-dire à une distance constante AB de l'origine des axes, et la courbe fixe est la circonférence décrite du point O avec un rayon égal à AB.

D'autre part, le point I est à la distance $\frac{AB}{2}$ du point milieu de AB. Donc la courbe mobile est la circonférence décrite du point M

comme centre avec le rayon $\frac{AB}{2}$. La représentation du mouvement se déduit de ces résultats.

101. Mouvement d'un corps solide possédant un point fixe. — Le mouvement d'un corps solide possédant un point fixe est représenté par une série continue de rotations instantanées autour des axes I, I′, I″,... passant tous par le point fixe. Supposons les solidifiés; ils forment dans l'espace un cône fixe S dont le sommet est le point fixe. Si l'on considère les droites *i*, *i*′, *i*″,... composées des points du corps, ou tout au moins des points, reliés invariablement au corps, qui se confondent successivement avec I, I′, I″,... on obtient un cône *s* de même sommet, solidaire du corps et roulant sur le cône S. On en déduit le mouvement, en supposant le corps lié invariablement au cône *s*, qui roule sur le cône S, avec une vitesse angulaire convenable, autour de la génératrice de contact.

102. Mouvement d'un corps solide entièrement libre. — Nous savons par le nº 73, que ce mouvement se compose d'une suite de translations et de rotations autour d'une série continue d'axes instantanés glissants I, I′, I″... Si nous les supposons solidifiés, ils forment dans l'espace une surface réglée S. Considérons les droites *i*, *i*′, *i*″,... composées des points du corps ou tout au moins des points reliés invariablement au corps, qui viennent successivement se confondre avec I, I′, I″,... Elles forment une surface réglée *s* solidaire du corps. Les deux surfaces S et *s* sont tangentes, suivant l'axe instantané glissant actuel, de plus, *i*, *i*′, *i*″ appartenant au corps, participent au double mouvement; elles glissent successivement sur I, I′, I″, en même temps qu'elles servent d'axes instantanés de rotation.

On en déduit la représentation du mouvement du corps, en le supposant lié invariablement à la surface réglée *s*, qui roule en glissant sur la surface réglée fixe S, à laquelle elle est tangente tout le long d'une génératrice. C'est la représentation de Poncelet.

On peut encore figurer le mouvement d'une infinité de manières différentes, selon le point directeur que l'on choisit. Tous les axes instantanés de rotation passent par ce point, en admettant un instant qu'il soit immobile et alors ils forment dans l'espace le cône S et dans le corps le cône *s* dont nous avons parlé au nº 101.

Nous tiendrons compte du mouvement du point directeur, en donnant au cône S une translation définie par le mouvement de ce point. En conséquence le corps sera supposé lié invariablement au cône *s*, qui roule sur le cône S, animé d'un mouvement de translation, déterminé par le mouvement du point directeur, sommet commun des deux surfaces.

CHAPITRE XI

MOUVEMENT RELATIF DE DEUX SOLIDES SE DÉPLAÇANT D'UNE MANIÈRE QUELCONQUE

103. **Problème.** — *On donne deux corps solides animés de mouvements quelconques ; on demande le mouvement relatif de l'un d'eux par rapport à l'autre, en ne considérant que les vitesses.*

Soient M et M' les deux corps, le mouvement relatif de M par rapport à M' s'établit en prenant celui-ci pour système de comparaison.

Dès lors le mouvement de M devient le mouvement absolu, celui de M' devient mouvement d'entraînement et le mouvement relatif cherché, est résultant du mouvement absolu et du mouvement d'entraînement changé de sens. D'où la règle : *Le mouvement relatif d'un corps solide par rapport à un autre, s'obtient en composant d'après les règles connues, le mouvement du premier, avec un mouvement égal et contraire à celui du second.*

104. **Application I.**— *On donne deux corps,* M *et* M', *tournant en sens inverses autour de deux axes parallèles* C *et* C' *avec des vitesses angulaires* ω *et* — ω'. *Chercher le mouvement relatif de* M *par rapport à* M'.

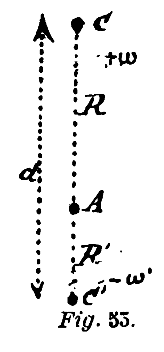


Fig. 53.

Nous nous conformons à la règle précédente, en composant la rotation $+\omega$ autour de C avec une rotation $+\omega'$ autour de C'. La rotation résultante $\omega+\omega'$ se produit autour d'un axe A, parallèle à C et à C, et tel que le point A divise la droite CC' dans le rapport inverse des vitesses angulaires; ainsi $\frac{AC}{AC'}=\frac{\omega'}{\omega}$ (90).

Ce rapport étant constant, l'axe A reste fixe dans l'espace. Le lieu S formé par les droites i, i_1, i_2 du corps M qui viennent successivement en A, est un cylindre de révolution dont l'axe est C et le rayon CA. De même les droites i', i'_1, i'_2.... du corps M', qui viennent successivement en A dans le mouvement relatif de M' par rapport à M, constituent un cylindre de révolution S' dont dont l'axe est C' et le rayon C'A. Les deux cylindres S et S', tangents suivant la génératrice A, participent aux mouvements des deux corps. Ils roulent l'un sur l'autre dans le mouvement réel, tandis que si l'on considère le mouvement relatif de M par rapport à M', celui-ci est immobilisé, et le cylindre S roule sur le cylindre S', avec une vitesse angulaire $(\omega + \omega')$. Dans ce mouvement, la circonférence C roule sur la circonférence immobile C', située dans le même plan normal aux axes. Ces deux circonférences, appelées *circonférences primitives*, sont les sections droites des cylindres, lieux des axes instantanés de rotation relative, dans chacun des deux corps.

Elles sont déterminées par les relations suivantes, où d est la distance des axes :

$$R + R' = d \text{ et } \frac{\omega}{\omega'} = \frac{R'}{R}.$$

105. **Application II.** — *On donne un corps* M *possédant la rotation* $+\omega$ *autour d'un axe* C ; *trouver son mouvement relativement au corps* M', *animé de la translation* $\overline{V}$.

Imprimons aux deux corps, la translation $-\overline{V}$; M' est immobilisé et le mouvement relatif de M est résultant de la rotation primitive autour de C et de la translation $-\overline{V}$. Nous transformons celle-ci en un couple de rotations, déterminé de façon à ce que l'une des rotations soit directement opposée à la rotation ω autour de C. L'axe de la seconde rotation du couple, se trouve dans un plan perpendiculaire à $\overline{V}$ et passant par C. Sa position est donnée par la relation $\omega x = V$, à condition de porter la longueur x dans un sens tel, que l'axe du couple soit équipollent à $-\overline{V}$.

Fig. 54.

Les deux rotations $+\omega$ et $-\omega$ autour de l'axe C, se détruisent, et le mouvement relatif de M par rapport à M', est figuré par la seule rotation ω autour de C'.

106. Application III. — *On donne deux corps* M *et* M′ *qui tournent uniformément autour d'axes non situés dans le même plan ; trouver le mouvement relatif de* M *par rapport à* M′.

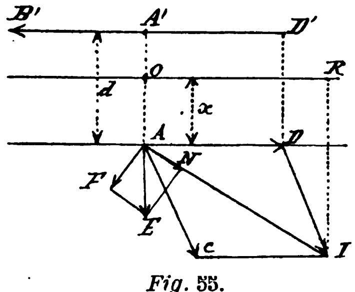


Fig. 55.

Les corps M′ et M sont respectivement animés de rotations ω' et ω, autour des axes $\overline{A'B'}$ et $\overline{AC}$, représentés par leurs projections sur deux plans V et H, choisis de façon que le plan H, mené par AC, soit parallèle à A′B′, et que le plan V, perpendiculaire à H, contienne A′B′.

En vertu de la règle formulée au nº 103, le mouvement relatif de M par rapport à M′ est résultant d'une rotation $\overline{A'D'}$, égale et directement opposée à $\overline{A'B'}$, et de la rotation $\overline{AC}$. Or la rotation $\overline{A'D'}$ est équivalente à une rotation égale $\overline{AD}$ et à une translation simultanée $\overline{AE}$ perpendiculaire au plan V (92).

Les deux rotations concourantes $\overline{AD}$ et $\overline{AC}$ se réduisent à la rotation Ω qui a pour axe $\overline{AI}$, et le mouvement relatif cherché est résultant de la rotation $\overline{AI}$ et de la translation $\overline{AE}$. On ramène ces deux mouvements simultanés à un mouvement hélicoïdal, par la décomposition de la translation $\overline{AE}$ suivant la droite AI et la direction perpendiculaire. Nous obtenons :

$$\overline{AE} = \overline{AN} + \overline{NE}.$$

La translation $\overline{NE}$ équivaut à un couple de rotations déterminé au nº 91. Prenons le plan du couple perpendiculaire au plan H et passant par AI. L'une des rotations étant égale et directement opposée à $\overline{AI}$, l'autre se fait autour d'un axe équipollent à $\overline{AI}$ et qui se projette suivant AI et OR. Sa position se déduit du théorème que nous venons de citer ; le bras de levier du couple est projeté en véritable grandeur sur le plan V, et sa longueur x est déterminée par la relation :

$$\Omega x = AF = AE \cos I\widehat{A}D = \omega' d \cos I\widehat{A}D \text{ (I)}$$

car $\omega' d = AE$ en valeur absolue.

D'autre part :

$$\Omega = \omega' \cos \widehat{IAD} + \omega \cos \widehat{IAC},$$

par conséquent :

$$d - x = d - \frac{\omega' d \cos \widehat{IAD}}{\Omega} = \frac{d}{\Omega}(\Omega - \omega' \cos \widehat{IAD})$$
$$= \frac{\omega d \cos \widehat{IAC}}{\Omega} \quad \text{(II)}.$$

Divisons membre à membre les relations I et II et tenons compte du triangle ACI, lequel donne $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{\sin \widehat{IAC}}{\sin \widehat{IAD}}$; il vient :

$$\frac{x}{d - x} = \frac{\omega' d \cos \widehat{IAD}}{\omega d \cos \widehat{IAC}} = \frac{\omega'}{\omega} \frac{\cos \widehat{IAD}}{\cos \widehat{IAC}} = \frac{\operatorname{tg} \widehat{IAC}}{\operatorname{tg} \widehat{IAD}}.$$

L'axe cherché est donc défini géométriquement : c'est la génératrice de contact de deux hyperboloïdes de révolution, tangents suivant cette droite. Les axes de ces surfaces sont précisément les axes des rotations données $\overline{A'B'}$ et $\overline{AC}$, les centres des cercles de gorge sont les points A et A', les longueurs des rayons sont x et $d - x$. Les deux rotations égales et directement opposées autour de AI, se détruisent et il reste la rotation égale à $\overline{AI}$, autour de l'axe projeté en AI et OR, ainsi que la translation $\overline{AN}$ parallèle à cette droite. Le mouvement hélicoïdal résultant de ces deux mouvements simultanés est le mouvement relatif. Les droites qui viennent successivement se confondre avec l'axe du mouvement hélicoïdal et qui appartiennent aux deux corps M et M', constituent les hyperboloïdes de révolution que nous avons indiqués. Supposons-les matérialisés. Dans le mouvement réel, ils roulent l'un sur l'autre en glissant suivant la génératrice de contact, tandis que dans le mouvement relatif, l'hyperboloïde solidaire de M, roule avec la vitesse angulaire Ω et glisse avec la vitesse $\overline{AN}$, sur l'hyperboloïde solidaire de M', que l'on suppose immobile. Nous trouverons une application de cette théorie dans l'étude des engrenages hyperboloïdes.

CHAPITRE XII

§ 1. *Cinématique analytique du mouvement du corps solide possédant un point fixe*

107. Le mouvement relatif, et le mouvement du corps solide, ont été étudiés dans les chapitres précédents, en partant de considérations purement géométriques, qui rendent les démonstrations moins abstraites. Il faut cependant reconnaître à la méthode analytique, indispensable pour la suite du cours, l'avantage d'une grande simplicité. Nous allons la donner en admettant la connaissance des mouvements de translation et de rotation.

Théorème. — ***Le mouvement d'un corps solide possédant un point fixe, est à chaque instant une rotation instantanée autour d'un axe passant par ce point.***

Cette propriété déjà connue (73) se rapporte au mouvement, considéré au point de vue des vitesses. Nous la démontrerons en recherchant le lieu des points du corps qui ont leurs vitesses nulles.

Dans ce but, prenons le point fixe pour origine de trois axes rectangulaires OXYZ, solidaires du corps. Ce système de comparaison a sa position définie par les cosinus directeurs des angles que forment OX, OY, OZ, avec trois axes rectangulaires fixes OX_1, OY_1, OZ_1. Nous les désignons par $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$; ce sont des fonctions continues du temps, entre lesquelles existent les six relations :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, \quad a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1.$$

$$aa' + bb' + cc' = 0, \quad aa'' + bb'' + cc'' = 0,$$
$$a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0.$$

Si x_1, y_1, z_1, sont les coordonneés d'un point quelconque du corps dans le système $OX_1Y_1Z_1$, les projections de sa vitesse $\overline{V}$ sur ces axes sont : $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dy_1}{dt}$, $\frac{dz_1}{dt}$, (nº 47). Or :

$$\overline{OM} = \overline{x} + \overline{y} + \overline{z}$$

et par suite :

$$x_1 = ax + a'y + a''z,$$
$$y_1 = bx + b'y + b''z,$$
$$z_1 = cx + c'y + c''z,$$

d'où l'on déduit, en remarquant que $x, y, z,$ sont constantes :

$$\frac{dx_1}{dt} = x\frac{da}{dt} + y\frac{da'}{dt} + z\frac{da''}{dt},$$

Fig 56.

$$\frac{dy_1}{dt} = x\frac{db}{dt} + y\frac{db'}{dt} + z\frac{db''}{dt}, \quad \frac{dz_1}{dt} = x\frac{dc}{dt} + y\frac{dc'}{dt} + z\frac{dc''}{dt}$$

Mais :

$$\overline{V} = \overline{\frac{dx_1}{dt}} + \overline{\frac{dy_1}{dt}} + \overline{\frac{dz_1}{dt}};$$

par conséquent les projections de la vitesse $\overline{V}$ sur les trois axes mobiles, résultent des formules suivantes :

$$V_x = a\frac{dx_1}{dt} + b\frac{dy_1}{dt} + c\frac{dz_1}{dt} = x\left(a\frac{da}{dt} + b\frac{db}{dt} + c\frac{dc}{dt}\right)$$
$$+ y\left(a\frac{da'}{dt} + b\frac{db'}{dt} + c\frac{dc'}{dt}\right) + z\left(a\frac{da''}{dt} + b\frac{db''}{dt} + c\frac{dc''}{dt}\right),$$
$$V_y = a'\frac{dx_1}{dt} + b'\frac{dy_1}{dt} + c'\frac{dz_1}{dt} = x\left(a'\frac{da}{dt} + b'\frac{db}{dt} + c'\frac{dc}{dt}\right)$$
$$+ y\left(a'\frac{da'}{dt} + b'\frac{db'}{dt} + c'\frac{dc'}{dt}\right) + z\left(a'\frac{da''}{dt} + b'\frac{db''}{dt} + c'\frac{dc''}{dt}\right),$$
$$V_z = a''\frac{dx_1}{dt} + b''\frac{dy_1}{dt} + c''\frac{dz_1}{dt} = x\left(a''\frac{da}{dt} + b''\frac{db}{dt} + c''\frac{dc}{dt}\right)$$
$$+ y\left(a''\frac{da'}{dt} + b''\frac{db'}{dt} + c''\frac{dc'}{dt}\right) + z\left(a''\frac{da''}{dt} + b''\frac{db''}{dt} + c''\frac{dc''}{dt}\right).$$

Ces expressions se simplifient, car les relations entre les cosinus $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$, dérivées par rapport au temps, donnent :

$$a\frac{da}{dt} + b\frac{db}{dt} + c\frac{dc}{dt} = 0, \quad a'\frac{da'}{dt} + b'\frac{db'}{dt} + c'\frac{dc'}{dt} = 0,$$
$$a''\frac{da''}{dt} + b''\frac{db''}{dt} + c''\frac{dc''}{dt} = 0,$$
$$a''\frac{da'}{dt} + b''\frac{db'}{dt} + c''\frac{dc'}{dt} = -\left(a'\frac{da''}{dt} + b'\frac{db''}{dt} + c'\frac{dc''}{dt}\right) = p,$$
$$a\frac{da''}{dt} + b\frac{db''}{dt} + c\frac{dc''}{dt} = -\left(a''\frac{da}{dt} + b''\frac{db}{dt} + c''\frac{dc}{dt}\right) = q,$$
$$a'\frac{da}{dt} + b'\frac{db}{dt} + c'\frac{dc}{dt} = -\left(a\frac{da'}{dt} + b\frac{db'}{dt} + c\frac{dc'}{dt}\right) = r.$$

De ces notations résultent :

$$V_x = qz - ry, \quad V_y = rx - pz, \quad V_z = py - qx.$$

Le lieu des points de vitesse nulle est donc déterminé par les équations :

$$qz - ry = 0, \quad rx - pz = 0, \quad py - qx = 0,$$

que nous mettons sous la forme : $\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}$ (1).

Elles définissent une droite passant par l'origine et qui dépend du temps, puisque p, q, r, sont fonctions de cette variable. Le mouvement à un instant quelconque, est par conséquent une rotation instantanée ; son axe passe par le point fixe et se projette suivant p, q, r, sur les axes mobiles OX, OY, OZ, ainsi que le prouvent les formules trouvées au nº 63.

Si l'on élimine le temps qui entre dans p, q, r, les équations (1) déterminent le cône s, lieu des axes instantanés dans le corps.

108. **Coordonnées d'Euler.** — La position du système mobile OXYZ est déterminée à chaque instant dans le système fixe $OX_1Y_1Z_1$ par neuf fonctions continues du temps a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', entre lesquelles existent les six relations indiquées plus haut. On les remplace par les trois coordonnées d'Euler, qui sont complètement indépendantes l'une de l'autre. Ce sont :

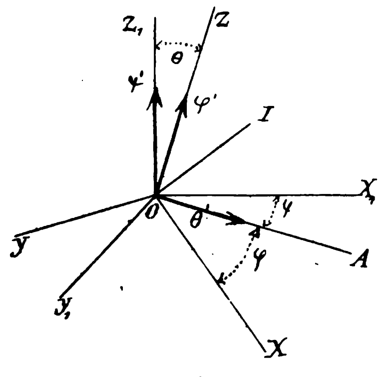


Fig. 57.

1º l'angle θ que fait l'axe positif OZ avec l'axe positif OZ_1 ;

2º l'angle ψ que fait la trace OA du plan XOY sur le plan X_1OY_1 avec l'axe OX_1.

On choisit OA de façon que la rotation de OZ_1 vers OZ, s'effectue dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre, pour un observateur placé les pieds en O et la tête en A. L'angle ψ croît positivement de OX_1 vers OY_1.

3º L'angle φ fait par OA avec OX, et que l'on compte positivement à partir de OA, dans le sens de OX vers OY.

Les formules de transformation entre les coordonnées d'Euler et les cosinus directeurs, s'établissent en considérant une sphère de centre O et de rayon unité. Les intersections des axes avec cette surface, déterminent des triangles sphériques, auxquels on applique la formule fondamentale

$$\cos a_1 = \cos b_1 \cos c_1 + \sin b_1 \sin c_1 \cos A.$$

Il vient :

$$a = \cos\varphi \cos\psi - \sin\varphi \sin\psi \cos\theta,$$
$$a' = -\sin\varphi \cos\psi - \cos\varphi \sin\psi \cos\theta, \quad a'' = \sin\psi \sin\theta,$$
$$b = \cos\varphi \sin\psi + \sin\varphi \cos\psi \cos\theta,$$
$$b' = -\sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\psi \cos\theta, \quad b'' = -\cos\psi \sin\theta,$$
$$c = \sin\varphi \sin\theta, \quad c' = \cos\varphi \sin\theta, \quad c'' = \cos\theta.$$

Nous remplaçons ces quantités par leurs valeurs dans les expressions de p, q, r, ce qui donne :

$$\left.\begin{aligned} p &= \sin\varphi \sin\theta \frac{d\psi}{dt} + \cos\varphi \frac{d\theta}{dt}, \\ q &= \cos\varphi \sin\theta \frac{d\psi}{dt} - \sin\varphi \frac{d\theta}{dt}, \\ r &= \frac{d\varphi}{dt} + \cos\theta \frac{d\psi}{dt}. \end{aligned}\right\} \text{II.}$$

§ 2. *Étude analytique du mouvement relatif du point*

109. Tout ce qui est dit aux numéros 65 et 77 sur les mouvements absolu, relatif et d'entraînement doit être répété ici. Le problème revient donc à trouver le mouvement absolu, quand on donne les deux autres. Le mouvement d'entraînement est déterminé par les coordonnées α, β, γ, de l'origine O et par les cosinus directeurs $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$, que font les axes mobiles avec les axes fixes.

Imaginons un système de trois axes rectangulaires $OX'Y'Z'$ parallèles aux axes $OX_1Y_1Z_1$, par rapport auxquels il possède un mouvement de translation déterminé par le point O. Celui-ci est fixe dans le système $OX'Y'Z'$, de sorte que le mouvement de OXYZ relativement à $OX'Y'Z'$, est à chaque instant une rotation instantanée autour d'un axe passant par O.

Position absolue du point. — Soient x, y, z, et x_1, y_1, z_1, les coordonnées relatives et les coordonnées absolues du point à l'instant t.

Nous avons :

$$\overline{O_1M} = \overline{O_1O} + \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$$

et par suite du théorème des projections (nº 5):

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha + ax + a'y + a''z, \\ y_1 &= \beta + bx + b'y + b''z, \\ z_1 &= \gamma + cx + c'y + c''z. \end{aligned}\right\} \quad (1.)$$

Dans ces égalités $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma, a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$, sont des fonctions continues du temps. Les trois premières sont données par le mouvement relatif, les autres par le mouvement d'entraînement; par conséquent x_1, y_1, z_1, c'est-à-dire la position absolue, est déterminée.

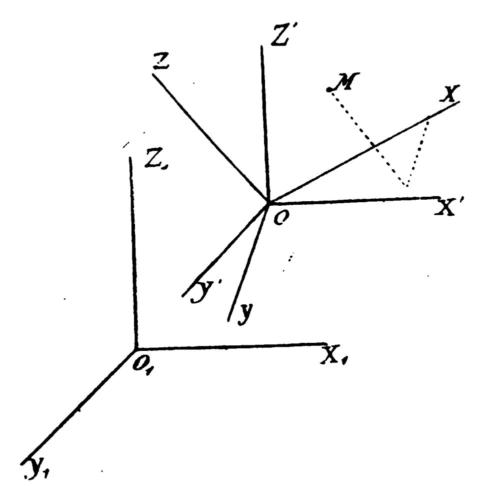


Fig. 58.

Vitesse absolue. — Il est démontré au nº 47 que

$$\overline{V_a} = \overline{\frac{dx_1}{dt}} + \overline{\frac{dy_1}{dt}} + \overline{\frac{dz_1}{dt}}.$$

Or les projections de la vitesse absolue sur les axes fixes, résultent des équations (1) dérivées par rapport au temps. Ne considérons que l'axe des x_1: il vient :

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} = &\left(\frac{d\alpha}{dt} + x\frac{da}{dt} + y\frac{da'}{dt} + z\frac{da''}{dt}\right) \\ &+ \left(a\frac{dx}{dt} + a'\frac{dy}{dt} + a''\frac{dz}{dt}\right). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

La première parenthèse est la dérivée de x_1, quand on suppose les coordonnées x, y, z, constantes, et par suite le point M relié invariablement aux axes mobiles. C'est donc la projection de la vitesse d'entraînement du point sur l'axe fixe O_1X_1 (79). La

seconde parenthèse, étant la dérivée des mêmes quantités, quand on suppose invariables α, β, γ, a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', représente la projection de la vitesse relative sur le même axe. On trouverait des résultats analogues pour O_1Y_1 et O_1Z_1; on en conclut, en vertu du théorème fondamental des projections (n° 5) et des équations (2), que *la vitesse absolue du point est résultante des vitesses relative et d'entraînement.*

Accélération absolue. — Les projections de l'accélération absolue $\frac{d^2x_1}{dt^2}$, $\frac{d^2y_1}{dt^2}$, $\frac{d^2z_1}{dt^2}$ sur les axes fixes, s'obtiennent en dérivant deux fois les équations (1), ce qui donne :

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{d^2x_1}{dt^2} &= \overset{\text{I}}{\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2} + x\frac{d^2a}{dt^2} + y\frac{d^2a'}{dt^2} + z\frac{d^2a''}{dt^2}\right)} \\
&\quad + \overset{\text{II}}{\left(a\frac{d^2x}{dt^2} + a'\frac{d^2y}{dt^2} + a''\frac{d^2z}{dt^2}\right)} \\
&\quad + 2\overset{\text{III}}{\left(\frac{da}{dt}\frac{dx}{dt} + \frac{da'}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{da''}{dt}\frac{dz}{dt}\right)}. \\
\frac{d^2y_1}{dt^2} &= \overset{\text{I}}{\left(\frac{d^2\beta}{dt^2} + x\frac{d^2b}{dt^2} + y\frac{d^2b'}{dt^2} + z\frac{d^2b''}{dt^2}\right)} \\
&\quad + \overset{\text{II}}{\left(b\frac{d^2x}{dt^2} + b'\frac{d^2y}{dt^2} + b''\frac{d^2z}{dt^2}\right)} \\
&\quad + 2\overset{\text{III}}{\left(\frac{db}{dt}\frac{dx}{dt} + \frac{db'}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{db''}{dt}\frac{dz}{dt}\right)}. \\
\frac{d^2z_1}{dt^2} &= \overset{\text{I}}{\left(\frac{d^2\gamma}{dt^2} + x\frac{d^2c}{dt^2} + y\frac{d^2c'}{dt^2} + z\frac{d^2c''}{dt^2}\right)} \\
&\quad + \overset{\text{II}}{\left(c\frac{d^2x}{dt^2} + c'\frac{d^2y}{dt^2} + c''\frac{d^2z}{dt^2}\right)} \\
&\quad + 2\overset{\text{III}}{\left(\frac{dc}{dt}\frac{dx}{dt} + \frac{dc'}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{dc''}{dt}\frac{dz}{dt}\right)}
\end{aligned}
\right\} \quad 3.
$$

Le raisonnement que nous venons de tenir, montre que les parenthèses I et les parenthèses II, sont les projections sur les axes fixes de l'accélération d'entraînement $\overline{J_e}$ et de l'accélération relative $\overline{J_r}$; quant aux parenthèses III, nous les considérons comme projections de l'accélération dite complémentaire, sur les mêmes axes.

De là cette conclusion : *L'accélération absolue est résultante de l'accélération relative, de l'accélération d'entraînement et de l'accélération complémentaire.* Reste à déterminer cette dernière; à cet effet, soient X_1, Y_1, Z_1 et X, Y, Z, ses projections sur les axes fixes et sur les axes mobiles. Le théorème des projections (nº 5) conduit aux relations suivantes :

$$X = aX_1 + bY_1 + cZ_1, \qquad Y = a'X_1 + b'Y_1 + c'Z_1,$$
$$Z = a''X_1 + b''Y_1 + c''Z_1.$$

Remplaçons dans ces égalités X_1, Y_1, Z_1, par les parenthèses III et mettons $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, en facteurs; il vient, en tenant compte des relations entre les cosinus directeurs (107) :

$$X = 2\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right),$$
$$Y = 2\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right), \qquad Z = 2\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right).$$

Elles prouvent que l'accélération complémentaire est équipollente à la vitesse d'un point P, déterminé par les coordonnées $2\frac{dx}{dt}$, $2\frac{dy}{dt}$, $2\frac{dz}{dt}$ et qui tournerait autour d'un axe $\overline{OI}$, défini par les projections p, q, r, sur les axes mobiles (*Fig.* 45, nº 81). Cette accélération, égale à $2\,\omega\,V_r \sin\alpha$, est perpendiculaire au plan passant par l'axe de la rotation instantanée et par une parallèle à la vitesse relative; elle a le sens dans lequel serait entraînée l'extrémité de la vitesse relative, par la rotation instantanée d'entraînement. C'est ce qui constitue le théorème de Coriolis (nº 80).

110. Nous devons rappeler à ce propos, les observations faites aux numéros 81, 82. L'impossibilité de déterminer complètement le mouvement d'entraînement, se trouve confirmée ici par les équations (1) du nº 109, qui renferment douze inconnues $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$, entre lesquelles n'existent que neuf équations,

savoir : les trois équations (1) et les six relations analytiques entre les cosinus directeurs. Mais il n'en est plus ainsi quand le mouvement d'entraînement est une translation, ou une rotation autour d'un axe passant par le point O devenu fixe. Dans le premier cas, $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$, sont des constantes, données à l'instant initial du mouvement, tandis que dans le second, α, β, γ, sont déterminées *a priori*.

111. La théorie analytique permet la solution des problèmes posés sur le mouvement relatif du point, au moyen d'une règle que nous appliquerons pour ainsi dire mécaniquement et qui est formulée comme suit :

1° Choisir les axes fixes, les axes mobiles, et déterminer les coordonnées du point en partant des données du problème.

2° Établir les équations de transformation entre les coordonnées absolues et les coordonnées relatives du point.

3° Dériver successivement deux fois les trois équations, et utiliser ces relations pour la détermination des inconnues.

Ajoutons immédiatement, que cette façon d'opérer n'est pas toujours la meilleure. Il sera souvent plus simple d'appliquer directement les propriétés du mouvement relatif.

Exemple : On donne 1° une circonférence animée d'une rotation uniforme autour d'un axe OZ perpendiculaire à son plan et passant par le centre; 2° un point qui décrit un diamètre d'un mouvement uniforme. On demande la vitesse et l'accélération absolues de ce mobile?

Prenons un système fixe $OX_1Y_1Z_1$, composé de deux diamètres perpendiculaires entre eux et de l'axe OZ_1. Choisissons les axes mobiles OXYZ de façon que OX soit précisément le diamètre sur lequel se meut le point et que le même axe des z soit conservé.

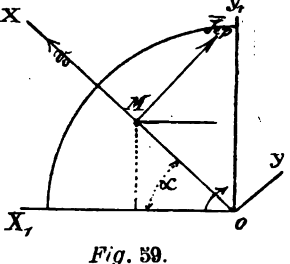


Fig. 59.

Admettons qu'à l'instant initial, les deux systèmes se confondent, le mobile étant au centre O. Le mouvement d'entraînement est la rotation uniforme $\bar{\omega}$, qui fait tourner le système OXYZ de l'angle α pendant le temps t et nous avons $\alpha = \omega t$. Le mouvement relatif du point se fait suivant l'axe OX, d'après la loi $x = v_0 t$ (n° 37).

Les coordonnées relatives à l'instant t sont donc :

$$x = v_0 t,\ y = 0.$$

Nous obtenons les coordonnées absolues x_1, y_1, par les équations :

$$x_1 = x \cos \alpha = v_0 t \cos \omega t, \quad y_1 = x \sin \alpha = v_0 t \sin \omega t.$$

En dérivant une première fois, il vient :

$$\frac{dx_1}{dt} = v_0 \cos \omega t - v_0 t\, \omega \sin \omega t,$$

$$\frac{dy_1}{dt} = v_0 \sin \omega t + v_0 t\, \omega \cos \omega t.$$

$\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dy_1}{dt}$, sont les projections sur les axes fixes de la vitesse absolue, laquelle est donc déterminée (nº 47).

Dérivons une seconde fois; nous trouvons :

$$\frac{d^2x_1}{dt_2} = -2\,\omega\, v_0 \sin \omega t - \omega^2 v_0 t \cos \omega t,$$

$$\frac{d^2y_1}{dt_2} = 2\,\omega\, v_0 \cos \omega t - \omega^2 v_0 t \sin \omega t.$$

De ces projections nous tirons l'accélération absolue.

Nous aurions pu raisonner directement. En conservant les mêmes axes et en ne considérant que l'accélération, le théorème de Coriolis donne :

$$\overline{J}_a = \overline{J}_r + \overline{J}_e + \overline{J}_{cp}.$$

Or $\overline{J}_r = 0$, et l'accélération d'entraînement à l'époque t, est celle que posséderait le mobile, relié invariablement aux axes OXYZ. Il décrit dans ces conditions la circonférence de centre O et de rayon OM $= v_0 t$, d'après la loi du mouvement uniforme; l'accélération tangentielle est nulle et l'accélération centripète, égale à ω^2OM, vaut donc $\omega^2 v_0 t$. Ses projections sur les axes fixes OX_1 et OY_1 sont $-\omega^2 v_0 t \cos \omega t$ et $-\omega^2 v_0 t \sin \omega t$.

Dans l'expression $2\,\omega\, V_r \sin \alpha$ de l'accélération complémentaire, ω est la rotation uniforme autour de l'axe OZ ou OZ_1, $V_r = v_0$, $\sin \alpha = 1$ et $2\,\omega\, V_r \sin \alpha = 2\,\omega\, v_0$; $\overline{J}_{cp}$ est d'ailleurs perpendiculaire au plan XOZ, défini par la vitesse relative v_0 et l'axe OZ; elle a le sens dans lequel l'extrémité de la vitesse relative est entraînée par la rotation autour de cet axe. Ses projections sur OX_1 et OY sont $-2\,\omega v_0 \sin \omega t$ et $2\,\omega v_0 \cos \omega t$.

112. Mouvements simultanés. — L'étude des mouvements simultanés est la conséquence naturelle de la théorie des mouvements relatifs et il nous suffira de répéter ce qui est dit du n° 84 au n° 92, car c'est indépendant du théorème de Chasles.

Cette notion permet d'établir très facilement les équations (II) du n° 108. Admettons le mouvement du corps résultant de trois rotations simultanées autour de OA, OZ et OZ_1, auxquelles correspondent les vitesses angulaires $\frac{d\theta}{dt}, \frac{d\varphi}{dt}, \frac{d\psi}{dt}$, que nous désignons par $\overline{\theta'}, \overline{\varphi'}, \overline{\psi'}$. Soit $\overline{\omega}$ l'axe instantané de rotation ; nous avons : $\overline{\omega} = \overline{\theta'} + \overline{\varphi'} + \overline{\psi'}$ (*Fig.* 57).

Cette relation géométrique se remplace par trois équations de projection sur les axes mobiles OXYZ, qui sont précisément les équations (II) du n° 108.

113. Mouvement quelconque du corps solide. — Prenons un point quelconque O du corps solide, pour origine des axes mobiles OXYZ, parallèles aux axes fixes $O_1X_1Y_1Z_1$, par rapport auxquels ils ont un mouvement de translation, déterminé par le point O. Relativement au système OXYZ, le corps possède un point fixe O et son mouvement est à chaque instant une rotation instantanée, autour d'un axe passant par ce point (107). De là ce théorème : ***Le mouvement d'un corps solide est résultant à chaque instant, d'une translation, qui dépend du point directeur, choisi à volonté dans le corps et d'une rotation instantanée autour d'un axe passant par ce point.***

114. Quel que soit le point directeur, ces différentes représentations du mouvement donnent des vitesses identiques aux mêmes points du corps. La théorie des mouvements simultanés est donc applicable et prouve que l'axe instantané de rotation et la vitesse angulaire sont indépendants du point directeur; celui-ci peut être déterminé de façon à obtenir l'axe instantané, parallèle à la translation (92), c'est-à-dire l'axe instantané glissant. Nous sommes ainsi ramenés au théorème suivant : ***Le mouvement du corps solide est résultant à chaque instant, d'une translation parallèle à l'axe instantané glissant et d'une rotation autour de cette droite.***

L'axe instantané glissant a toutes les propriétés de l'axe central (28). On trouve sa position par une construction très simple,

basée sur le théorème suivant : *Les projections des vitesses contemporaines des points du solide sur l'axe instantané glissant, sont égales entre elles et à la vitesse de translation,* encore dite de glissement. Nous le démontrons comme au n° 68 et par conséquent nous déterminons l'axe instantané par la construction connue.

115. Nous compléterons l'exposition du cours en examinant le cas particulier du mouvement d'une figure plane dans son plan ; puis en donnant la théorie du glissement, du roulement et enfin la représentation géométrique du mouvement du corps solide.

La première partie de ce programme, est la répétition presque textuelle du n° 75 et la seconde est développée du n° 94 au n° 102.

LIVRE III

MÉCANIQUE DU POINT

CHAPITRE XIII

§ 1. *Des forces*

116. ***La mécanique étudie les rapports entre le mouvement et les causes qui le produisent ou le modifient.*** Ces causes, appelées forces, se manifestent à nous par l'intermédiaire de la matière et il sera nécessaire de faire intervenir cette notion nouvelle dans toute la suite du cours. De là les définitions suivantes :

Nous appelons ***corps matériel*** une portion de la matière limitée en tous sens. Elle est composée de molécules extrêmement petites, que leurs dimensions inappréciables rendent assimilables aux points géométriques, mais qui en diffèrent en ce que chacune d'elles ne peut se mouvoir, ou modifier son mouvement, que sous l'action de certaines causes; et en outre constitue elle-même un centre d'action de la matière. Pour cette raison, on leur donne le nom de ***points matériels.***

Nous n'examinerons pas la question de savoir si le point matériel constitue une réalité physique, un simple centre d'action, comme l'ont soutenu des auteurs éminents; ou bien si la division de la matière en parties de plus en plus petites peut se continuer indéfiniment, sans jamais arriver au simple point; ou enfin si l'on finit par arriver à des atomes indivisibles, insécables, qui ne seraient pas des points.

Nous ne reviendrons plus sur cette question, qui est sans influence sur l'exposition du cours.

117. **Des forces.** — ***Toute cause de production ou de modification du mouvement est donc une force.*** Cette définition, indépendante de la nature de la force, ne tient compte que de l'effet

produit, lequel sert de base à nos déductions. Nous admettons la proportionnalité de la cause à l'effet, et c'est en vertu de cet axiome, commun à toutes les sciences physiques, que nous dirons :

1° *La grandeur ou l'intensité de la force est proportionnelle à l'accélération qu'elle communique au point matériel soumis à son action.* Ce dernier prend le nom de *point d'application.*

On attribue à la force, la direction et le sens de l'accélération ainsi développée.

2° *Une force est dite constante, quand elle donne à son point d'application une accélération constante.* Dans tous les autres cas, elle est variable ; par conséquent, une force constante agissant sur un point matériel sans vitesse, lui imprime un mouvement rectiligne et uniformément accéléré.

3° *Deux forces constantes sont égales si, agissant successivement sur le même point matériel, elles lui communiquent des accélérations égales.*

118. **Mesure des forces.** — Il résulte des considérations émises au n° 117, que si F', F'', F''' sont les intensités des forces, J', J'', J''', les accélérations qu'elles donnent au même point d'application, on a :

$$\frac{F'}{J'} = \frac{F''}{J''} = \frac{F'''}{J'''} = m.$$

Le rapport m dépend uniquement du point matériel, qu'il sert en quelque sorte à caractériser, car ces mêmes forces communiqueraient à un autre point des accélérations J_1', J_1''.... pour lesquelles on aurait encore :

$$\frac{F'}{J_1'} = \frac{F''}{J_1''} = \frac{F'''}{J_1'''} = m_1.$$

On a donné au rapport constant entre la force et l'accélération transmise au point matériel soumis à son action, le nom de *masse* du point. Des égalités précédentes on tire d'ailleurs :

$$F' = mJ' = m_1J_1', \quad F'' = mJ'' = m_1J_1''.$$

La grandeur ou l'intensité de la force est donc mesurée par le produit de la masse du point d'application, par l'accélération qu'elle lui communique.

Dans ce qui précède, nous avons considéré comme notion première, non seulement l'existence des forces ou des causes, mais

encore la possibilité de les mesurer numériquement. On aurait pu aussi, et c'est la marche préconisée par plusieurs auteurs, définir la force comme produit de la masse par l'accélération, la masse devenant alors un simple coefficient, constant pour un point matériel donné.

119. Représentation géométrique de la force. — La force est déterminée complètement par son point d'application, sa direction, son sens et son intensité, ce qui la rend susceptible d'une représentation géométrique, que l'on obtient *en menant par le point d'application pris comme origine, un vecteur parallèle à l'accélération, de même sens que celle-ci, et de longueur proportionnelle à l'intensité.*

120. Des unités mécaniques. — Nous avons indiqué en cinématique les unités d'espace et de temps, en fonction desquelles nous avons obtenu la vitesse et l'accélération, mais il reste à définir les unités de force et de masse. On considère en pratique une force particulière, la pesanteur, déjà connue, tout au moins expérimentalement, par le cours de physique. Elle imprime au point matériel soumis à son action, une accélération g et le produit mg est le poids du point matériel. Il s'évalue en kilogrammes et cette unité sert aussi à mesurer les forces.

L'unité de masse se déduit du rapport $m = \frac{p}{g}$, ce qui donne $p = g$, si l'on fait $m = 1$. L'unité de masse est donc la masse du point matériel qui aurait un poids de g kilogrammes (1).

De ce qui précède, il faut conclure que trois notions sont fondamentales en mécanique, savoir : l'espace, le temps, la force ou la masse. Toute modification dans les unités correspondantes, amène un changement déterminé, non seulement dans les nombres qui représentent les grandeurs fondamentales, mais encore dans ceux qui se rapportent aux grandeurs dérivées : vitesse, accélération, masse ou force.

En effet, soient par exemple L, T, P, les unités d'espace, de temps et de force ; nous avons, dans le système proposé, les nombres s, t, F, V, J, m, pour exprimer les six grandeurs mesu-

(1) Ou K fois la masse du point matériel qui aurait un poids de $\frac{g}{K}$ kilogrammes.

rées. Prenons de nouvelles unités L′, T′, P′, telles que $L' = lL$, $T' = \tau T$, $P' = fP$, les nombres nouveaux représentant les mêmes grandeurs seront s', t', F′, V′, J′, m'. Mais nous avons trouvé en cinématique (45) :

$$s' = \frac{s}{l}, \quad t' = \frac{t}{\tau}, \quad V' = \frac{\tau}{l} V, \quad J' = \frac{\tau^2}{l} J.$$

D'autre part :

$$F' = \frac{FP}{P'} = \frac{F}{f}, \quad m' = \frac{F'}{J'} = \frac{F}{J}\frac{l}{f\tau^2} = m\frac{l}{f\tau^2}.$$

Si donc :

$$L = 1^m, \quad T = 1'', \quad P = 1 \text{ kilogramme},$$
$$L' = 1000^m, \quad T' = 1', \quad P' = 1000 \text{ kilogrammes},$$

nous aurons $l = 1000$, $\tau = 60$, $f = 1000$.

En fait, il est plus rationnel de prendre la masse comme notion fondamentale, parce que le kilogramme n'est défini rigoureusement, que si l'on spécifie le point de la surface de la terre, où l'on a placé le litre d'eau distillée au maximum de densité qui le représente par son poids.

Les unités d'espace, de temps et de masse, sont dites *absolues* et peuvent être prises arbitrairement. Du moment qu'elles sont données, les unités dérivées sont déterminées. Prenons par exemple le système C.G.S., les unités absolues sont le centimètre, la seconde et la masse gramme.

Dans ce système l'unité de force, appelée *dyne*, est la force capable d'imprimer instantanément à la masse gramme, une accélération de 0^m01 par seconde.

Soient L, T, M, les unités absolues d'espace, de temps et de masse, dans un premier système d'unités, L′, T′, M′, des unités nouvelles telles que $L' = lL$, $T' = \tau T$, $M' = \mu M$.

Nous aurons en conservant les mêmes notations :

$$s' = \frac{s}{l}, \quad t' = \frac{t}{\tau}, \quad V' = \frac{\tau}{l} V, \quad J' = \frac{\tau^2}{l} J, \quad m' = \frac{m}{\mu},$$
$$F' = m'J' = \frac{m}{\mu}\frac{\tau^2}{l} J = \frac{mJ\tau^2}{\mu l} = \frac{\tau^2}{\mu l} F.$$

121. Tout ce que nous venons de dire des forces, peut à la rigueur s'entendre des forces apparentes, relatives à un système quelconque de comparaison, comme les accélérations apparentes

en cinématique. Ceci est la conséquence même du mode de représentation des forces (121) (1); mais à partir de ce moment, nous allons introduire des principes qui ne sont plus applicables par rapport à un système quelconque, mais seulement par rapport à des systèmes déterminés, que nous appellerons *systèmes immobiles*. Ces principes ne sont pas démontrés, mais sont vérifiés expérimentalement par les applications des lois qui en ont été déduites aux phénomènes naturels et spécialement aux observations astronomiques. Nous remarquerons à ce sujet, que nous rapportons instinctivement les phénomènes mécaniques terrestres à notre planète, ou à trois axes qui lui sont invariablement liés. Ce choix permet, en général, de considérer le mouvement à la surface de la terre, comme se rapportant à un système de comparaison immobile, mais dans des questions plus délicates, on commettrait, ainsi que nous le verrons, des erreurs graves en rapportant les principes généraux à un système de comparaison de cette espèce.

§ 2. *Des principes fondamentaux de la mécanique*

122. Principe de l'inertie. — *Tout point matériel sur lequel n'agit aucune force décrit une ligne droite d'un mouvement uniforme, par rapport à un système immobile.*

Dans l'énoncé de ce principe, nous introduisons deux notions premières nouvelles : 1° la notion de la force, considérée non plus comme apparente ou relative à un système de comparaison, mais comme force absolue, car sans cela le principe serait déjà compris dans ce qui précède ; 2° la notion de l'immobilité. On pourrait n'introduire qu'une seule de ces deux notions, chacune des deux pouvant se définir au moyen de l'autre (2).

La propriété indiquée par ce principe est dite l'*inertie* de la matière. Elle fait qu'un point matériel ne peut de lui-même modi-

(1) Toutefois l'unité de force, qui a été considérée dans le numéro précédent relativement à la surface de la terre, varierait avec le système de comparaison.

(2) Pour plus de détails sur ce point et sur les principes généraux, voir le mémoire de M. De Tilly sur les trois principes fondamentaux de la mécanique rationnelle (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XXIV).

fier sa vitesse. Toute variation de celle-ci, par conséquent toute accélération, est causée par une force extérieure au point, lequel est inerte sur lui-même. De ce fait, il ne faut cependant pas conclure à l'inactivité de la matière, car un point matériel agit sur d'autres points et par là donne naissance à des forces.

123. **Principe de l'indépendance des effets des forces.** — *Si différentes forces ou actions naturelles agissant séparément sur un point matériel, lui communiquent par rapport à un système immobile, différentes accélérations, ces mêmes forces, agissant simultanément sur le même point, lui communiqueraient par rapport au même système, une accélération qui serait la somme géométrique des premières.*

En vertu de ce principe, l'accélération absolue d'un point M soumis aux forces simultanées $\overline{F'}$, $\overline{F''}$, $\overline{F'''}$ est égale à $\overline{J'} + \overline{J''} + \overline{J'''}$, si nous désignons par $\overline{J'}$, $\overline{J''}$, $\overline{J'''}$, les accélérations qui seraient dues aux forces agissant isolément.

124. **Composition des forces appliquées à un point matériel.** — Un point matériel soumis à l'action simultanée de plusieurs forces $\overline{F'}$, $\overline{F''}$, $\overline{F'''}$, possède une certaine accélération par rapport au système de comparaison immobile. La force unique qui produirait cet effet, est dite *la résultante* des forces données et celles-ci sont appelées les *composantes.*

Théorème. — *La résultante des forces quelconques appliquées à un point matériel, est égale à la somme géométrique des forces composantes.*

Soient m la masse du point, $\overline{J'}$, $\overline{J''}$, $\overline{J'''}$, les accélérations simultanées qui seraient dûes au forces composantes, $\overline{R}$ la résultante. En vertu du principe précédent, si $\overline{J}_1$ est l'accélération du point par rapport au système de comparaison fixe, nous avons :

$$\overline{J}_1 = \overline{J'} + \overline{J''} + \overline{J'''},$$

d'où en multipliant les deux membres de cette égalité géométrique par m, il vient :

$$\overline{mJ_1} = \overline{mJ'} + \overline{mJ''} + \overline{mJ'''} \text{ ou } \overline{R} = \overline{F'} + \overline{F''} + \overline{F'''}.$$

S'il y a deux composantes, la résultante est la diagonale du parallélogramme construit sur ces forces, donc

$$\frac{R}{\sin \widehat{F'F''}} = \frac{F'}{\sin \widehat{RF''}} = \frac{F''}{\sin \widehat{F'R}},$$

$$R^2 = F'^2 + F''^2 + 2\,F'F'' \cos \widehat{F'F''}.$$

Le théorème précédent permet d'appliquer aux forces, les propriétés établies aux numéros 6 et 7, de la théorie vectorielle, notamment en ce qui concerne l'expression analytique de la résultante et la décomposition des forces.

125. Dans ce qui précède nous avons donné deux définitions différentes de la masse, mais nous remarquerons avec M. De Tilly, qu'il en existe une troisième, considérée souvent comme la plus simple et consistant à dire que la masse est la quantité de matière contenue dans le point matériel.

" A priori, la *quantité de matière* n'est pas une chose simple, ni une chose facile à mesurer *directement*, et si on ne la mesure qu'indirectement par les poids, on rentre dans l'une des deux définitions données.

Cependant l'idée de la proportionnalité entre la masse et la quantité de matière est une idée juste et utile ; au point où nous en sommes, nous pouvons la justifier théoriquement.

Considérons en effet deux points matériels identiques, soumis à deux forces égales, produisant sur eux des accélérations égales. Si nous rapprochons les points matériels, jusqu'à n'en former qu'un seul, sa quantité de matière sera doublée, l'accélération sera restée la même, et la force sera devenue double. Donc la masse (rapport de la force à l'accélération) sera aussi devenue double, c'est-à-dire qu'elle est proportionnelle à la quantité de matière.

Du rapport très simple $\frac{2}{1}$, on passerait aisément au rapport $\frac{m}{1}$, puis au rapport quelconque $\frac{m}{n}$.

Mais il ne faut pas perdre de vue que dans le raisonnement ci-dessus, nous avons admis plusieurs faits et notamment que deux forces de même direction et de même sens s'ajoutent, ce qui n'est pas évident à priori. C'est une conséquence du principe de

l'indépendance des effets des forces, soumis aux mêmes conditions que le principe général, c'est-à-dire que cela n'est vrai que si les forces sont évaluées par rapport à un système immobile. Dans tout autre système, le raisonnement n'aboutirait que par suite d'une compensation d'erreurs. „

Voilà pourquoi nous n'avons pu établir logiquement la proportionnalité de la masse à la quantité de matière qu'au point où nous en sommes, et non pas lorsque nous avons parlé de la masse une première fois.

126. **Principe de l'action égale et contraire à la réaction.** — *Lorsqu'un point matériel exerce sur un autre point matériel une action représentée par une force, réciproquement le second point réagit sur le premier et donne naissance à une force égale et contraire, appelée réaction. L'action et la réaction ont pour direction commune la droite qui joint les deux points.*

Ces forces sont dites *réciproques*. Si l'on admettait que toute force appliquée à un point matériel, émane d'un autre point matériel, comme dans le principe ci-dessus, on en conclurait que dans la nature, les forces sont toujours réciproques.

§ 3. *Dynamique du point matériel libre*

127. *La dynamique a pour objet les lois du mouvement.* On la divise en deux parties : la dynamique du point matériel et la dynamique des systèmes matériels, qui est ramenée à la précédente, par des considérations exposées dans la suite du cours.

Le point matériel peut se trouver dans deux états différents selon qu'il est *libre*, ou *gêné* dans son mouvement par des liaisons matérielles, représentées analytiquement par des équations de la forme

$$L(x, y, z, t) = 0,$$

auxquelles les coordonnées du point doivent satisfaire. Chacune de ces liaisons réagit sur le point et donne naissance à une force appelée *force de liaison*. Les forces de cette nature sont inconnues, mais leur intervention a l'avantage de ramener l'étude du point lié à celle du point libre.

Nous admettons quelquefois en mécanique rationnelle, mais

seulement à titre de simplification et d'approximation, que la force de liaison est normale à chaque instant à la surface déterminée par l'équation :

$$L(x, y, z, t) = 0,$$

dans laquelle t a la valeur particulière à l'époque indiquée. Cette hypothèse ne se rapporte nullement à la réalité, car les liaisons naturelles engendrent des frottements.

Ainsi un point matériel placé sur une surface réelle, subit une réaction oblique à la surface, qu'on peut décomposer suivant la normale et suivant une direction située dans le plan tangent. Cette dernière composante se manifeste par la résistance opposée au glissement du point sur la surface. Elle varie entre zéro et une valeur limite, dite *frottement de glissement*, pour laquelle la réaction fait avec la normale à la surface un angle déterminé, porté en sens inverse du mouvement produit ou qui tend à se produire. Il s'appelle l'*angle de frottement* (*Fig.* 60). Soient α cet angle, $\overline{F}$ le frottement de glissement, $\overline{N}$ la composante normale de la réaction, nous avons :

$$F = N \, tg \, \alpha,$$

et cette force est directement opposée à la vitesse. L'expérience a donné les valeurs de $tg \, \alpha$ pour les différentes substances. Elles sont renseignées dans les tables sous le nom de coefficients de frottement et sont représentées par la lettre f. Elles se rapportent au mouvement existant ou sur le point de prendre naissance et le frottement de glissement se déduit de la réaction normale N, par la formule précédente. Dans toutes les autres circonstances la composante tangentielle est égale à $N \, tg \, \varepsilon$, mais l'angle ε que fait la réaction avec la normale est inconnu.

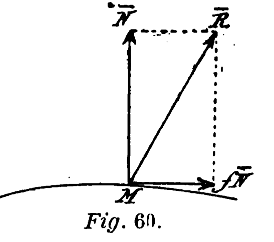


Fig. 60.

Les liaisons pratiques sont généralement indépendantes du temps ; le plus souvent elles sont constituées par des surfaces, des courbes, des tiges ou des fils matériels. Nous aurons l'occasion de les étudier plus complètement, mais la suite du cours exige un mot d'explication quant aux fils et aux tiges. Ils seront supposés inextensibles, de sections négligeables et par suite la force de

liaison développée a nécessairement la direction du fil. Elle s'appelle *tension* dans ce dernier cas, et est dirigée vers l'intérieur du fil, puisqu'il ne fonctionne que si l'action du point matériel lié le maintient tendu. La même obligation n'existe pas pour la tige, qui est rigide, tandis que le fil est censé d'une flexibilité parfaite.

128. **Équations fondamentales de la dynamique.** — *On appelle forces directement appliquées à un point matériel, celles qui agissent sur celui-ci, à l'exception des forces de liaison.* La résultante des forces directement appliquées et des forces de liaison est appelée la *force totale.* Elle est déterminée par la relation fondamentale :

$$\overline{F}_t = \overline{mJ},$$

qui sert de base à la dynamique et que l'on exprime en disant *que la force unique qu'il faut appliquer au point matériel rendu libre, pour lui conserver son mouvement, est le produit de la masse par l'accélération totale, dont la direction et le sens lui sont attribués.* Si X_t, Y_t, Z_t, sont les composantes de la force totale suivant les axes rectangulaires, l'égalité géométrique précédente peut se remplacer par les trois relations analytiques :

$$X_t = m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y_t = m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z_t = m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Ce sont les équations fondamentales du mouvement du point matériel libre ou rendu libre. On trouve d'autres relations équivalentes, en remarquant que l'accélération totale est résultante de l'accélération tangentielle $\overline{\frac{dv}{dt}}$ et de l'accélération centripète $\overline{\frac{v^2}{\rho}}$ (40). La force totale est donc résultante de $m\overline{\frac{dv}{dt}}$ et de $\overline{\frac{mv^2}{\rho}}$. Ces deux forces ont la direction et le sens des accélérations correspondantes; elles sont dites *force tangentielle* et *force centripète.* Si nous les représentons par F_{tg} et F_c, nous aurons les équations :

$$m\frac{dv}{dt} = F_{tg}, \quad \frac{mv^2}{\rho} = F_c,$$

qui peuvent être utiles quand la trajectoire est connue.

129. Mouvement d'un point matériel libre. — *On donne les circonstances initiales du mouvement d'un point matériel libre, c'est-à-dire sa position et sa vitesse à un instant déterminé; on demande le mouvement qu'il prendra sous l'action d'une force totale, définie en fonction du temps, par une loi connue.*

Le problème sera résolu, si l'on trouve à chaque instant, l'accélération, la vitesse, la position du mobile et par suite :

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}, \qquad \frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}, \qquad x, \quad y, \quad z.$$

A cet effet les équations fondamentales, dans lesquelles la force totale est fonction de la vitesse du mobile, de sa position et du temps, se mettent sous la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{X_t}{m} = f_1\left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t\right),$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Y_t}{m} = f_2\left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t\right),$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{Z_t}{m} = f_3\left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t\right).$$

Elles ne renferment que des dérivées totales et l'intégration de ce système de trois équations différentielles simultanées du second ordre, résout le problème. Elle donne x, y, z, en fonction du temps et de six constantes arbitraires, en sorte que les intégrales du système sont :

$$\text{(I)} \quad x = \varphi_1(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma', t), \quad y = \varphi_2(\alpha, \dots t), \quad z = \varphi_3(\alpha, \dots t).$$

Les constantes s'obtiennent en partant des circonstances initiales du mouvement. On exprime que pour $t = 0$, $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, prennent les valeurs $x_0, y_0, z_0, \left(\frac{dx}{dt}\right)_0, \left(\frac{dy}{dt}\right)_0, \left(\frac{dz}{dt}\right)_0$. Les intégrales du mouvement sont donc dérivées par rapport à t et dans les six équations ainsi formées, on fait $t, x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ égales à leurs valeurs initiales. On a par suite :

$$x_0 = \varphi_1(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma', t_0), \quad y_0 = \varphi_2(\alpha, \dots t_0), \quad z_0 = \varphi_3(\alpha, \dots t_0),$$
$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \varphi_1'(\alpha, \dots t_0), \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = \varphi_2'(\alpha, \dots t_0), \quad \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = \varphi_3'(\alpha, \dots t_0).$$

De ces six relations on tire les constantes, opération qui doit se faire sans ambiguïté, si le mouvement est parfaitement défini.



Enfin, l'élimination du temps entre les équations (I), conduit aux équations de la trajectoire.

Reprenons les intégrales du mouvement et leur dérivées :

$$(\mathrm{II})\left\{\begin{array}{lll} x = \varphi\,(\alpha, \ldots t), & y = \varphi_2\,(\alpha, \ldots t), & z = \varphi_3\,(\alpha, \ldots t), \\ \dfrac{dx}{dt} = \varphi_1{}'\,(\alpha, \ldots t), & \dfrac{dy}{dt} = \varphi_2{}'\,(\alpha, \ldots t), & \dfrac{dz}{dt} = \varphi_3{}'\,(\alpha, \ldots t). \end{array}\right.$$

Nous les supposons mises sous la forme :

$$(\mathrm{III})\left\{\begin{array}{lll} \alpha = \mathrm{F}_1\left(x, y, z, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}, t\right), & \beta = \mathrm{F}_2\,(x, \ldots t), & \gamma = \mathrm{F}_3\,(x, \ldots t), \\ \alpha' = \mathrm{F}_4\left(x, y, z, \dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt}, t\right), & \beta' = \mathrm{F}_5\,(x, \ldots t), & \gamma' = \mathrm{F}_6\,(x, \ldots t). \end{array}\right.$$

Ces six fonctions du temps, des coordonnées et des composantes de la vitesse, conservent une valeur constante pendant toute la durée du mouvement et représentent toutes ses propriétés. En effet une autre fonction des mêmes variables, satisfaisant aux mêmes conditions, est une conséquence des relations précédentes. Soit par exemple :

$$\psi\left(x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}, t\right) = \mathrm{C},$$

une fonction de cette espèce; elle fait système avec les équations (III) et l'élimination de $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, conduit à une relation :

$$\mathrm{C} = \theta\,(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma', t),$$

ce qui rendrait C fonction du temps; celui-ci doit donc disparaître de l'équation précédente, qui ne représente plus une propriété nouvelle du mouvement.

La solution complète du problème est ainsi ramenée à la recherche de six fonctions distinctes et constantes du temps, des coordonnées du mobile et de sa vitesse. Si le mouvement se fait dans un plan, on prend celui-ci pour plan des XY; les équations différentielles sont au nombre de deux et il y a quatre constantes. Lorsque le mouvement est rectiligne, sa direction est prise pour axe des x; il reste une équation et deux constantes.

130. **Problème.** — *On donne la loi du mouvement du point matériel libre et on demande la force totale qui le sollicite.*

Ce problème est la réciproque du précédent, car x, y, z sont des

fonctions connues du temps, qu'il suffit de dériver deux fois, pour trouver les vitesses et les accélérations projetées sur les trois axes, c'est-à-dire la force totale.

131. De l'équilibre du point matériel. — *On dit qu'un point matériel libre est en équilibre sous l'action des forces qui agissent sur lui, lorsqu'elles ne modifient pas son mouvement.* L'accélération communiquée est nulle de même que la force totale, et si $\overline{F}$ est l'une des composantes, nous aurons :

$$\overline{\Sigma F} = 0, \text{ ou } \Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0,$$
$$\text{c'est-à-dire encore} \quad X_t = 0, \quad Y_t = 0, \quad Z_t = 0.$$

Dans ces conditions la ligne polygonale des forces est fermée et chacune d'elles est égale et directement opposée à la résultante de toutes les autres (*Fig.* 61). Un point matériel soumis à l'action de deux forces égales et directement opposées est donc en équilibre.

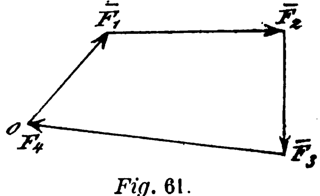


Fig. 61.

132. Évaluation pratique de l'intensité d'une force. — La propriété qui vient d'être indiquée permet d'évaluer l'intensité d'une force. Au lieu de la mesurer par l'accélération communiquée à une masse déterminée, on la compare au kilogramme, pris comme unité. Imaginons en effet qu'on fasse agir sur le point d'application d'une force $\overline{F}$, autant de forces unités directement opposées, que cela est nécessaire pour maintenir le point en équilibre. Elles ont une résultante égale à leur somme arithmétique, et qui mesure la force (124).

133. Des forces d'inertie. — *On appelle force d'inertie une force égale et contraire à la force totale.* Elle est égale à $-\overline{mJ}$ et et ses projections sur les axes rectangulaires sont :

$$-m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad -m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad -m\frac{d^2z}{dt^2},$$

D'autre part ses composantes suivant la tangente et la normale principale à la trajectoire, sont :

$$-m\frac{dv}{dt}, \quad -\frac{mv^2}{\rho}.$$

Elles sont de sens opposés aux accélérations tangentielle et centripète. On leur donne le nom de *force d'inertie tangentielle* et de *force centrifuge.*

La force d'inertie est fictive et n'agit pas sur le mobile, mais il résulte du troisième principe (126) qu'elle peut être considérée comme appliquée au point M′ duquel émanerait la force totale (*Fig.* 62). Très souvent cependant on suppose la force centrifuge active sur M. Cette erreur provient de l'examen superficiel et incomplet du phénomène suivant. Un mobile est retenu sur la surface d'une sphère par un fil inextensible attaché par son extrémité au point fixe M′. Par suite de l'inertie (122) le point tend à s'échapper, mais la tension du fil le retient sur la sphère; de là naissance d'une action réciproque du mobile sur le fil, qui est la *force centrifuge.*

Fig 62.

134. **Principe de d'Alembert.** — Les équations du mouvement s'écrivent quelquefois de manière à utiliser les définitions précédentes. Mises sous la forme :

$$X_t - m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad Y_t - m\frac{d^2y}{dt^2} = 0, \quad Z_t - m\frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

elles expriment l'équilibre entre la force totale et la réaction d'inertie (131). Mais cet équilibre est purement fictif, puisque ces forces n'agissent pas sur le même point et c'est pour le distinguer de l'équilibre réel, qu'on le qualifie de *dynamique.* De là le principe d'Alembert : *Le point matériel est en équilibre dynamique sous l'action de la force totale et de la réaction d'inertie.*

Il est souvent employé par les auteurs qui commencent la mécanique par l'examen du cas particulier de l'équilibre, car il ramène la dynamique à une question de statique.

CHAPITRE XIV

THÉORÈMES GÉNÉRAUX DE LA MÉCANIQUE

135. Les six intégrales du mouvement donnent la solution complète du problème, et chacune d'elles sera substituée avantageusement à l'une des équations fondamentales. Si trois de ces

relations sont connues sous la forme (III) du n° 129, la question revient à l'intégration de trois équations différentielles du premier ordre, tandis que la possession de toutes les six, donne immédiatement $x, y, z, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ en fonction du temps et des constantes. Il est difficile de les déterminer, mais par une combinaison convenable des équations fondamentales, on parvient à certaines relations qui simplifient le problème. Les propriétés qu'elles représentent, énoncées en langage ordinaire, donnent les principes généraux de la mécanique.

136. Moments des forces. — *On appelle moment d'une force par rapport à un point ou à un axe, le moment du vecteur qui la représente* (11 à 18).

Il possède donc toutes les propriétés des moments des vecteurs; nous les énonçons comme suit :

1° *Le moment d'une force par rapport à un axe, est la projection sur celui-ci, du moment de la force par rapport à un point quelconque de l'axe.*

2° *Le moment de la résultante de forces ayant le même point d'application, par rapport à un point ou à un axe, est la résultante des moments des composantes* (n° 12, 13).

3° Si L, M, N sont les moments d'une force par rapport aux trois axes rectangulaires de coordonnées; X, Y, Z, ses composantes suivant ceux-ci; x, y, z, les coordonnées du point d'application, on a :

$$L = Zy - Yz, \quad M = Xz - Zx, \quad N = Yx - Xy. \quad (15)$$

4° En conservant les notations précédentes, le moment d'une force par rapport à un axe qui passe par l'origine des coordonnées et fait avec les axes positifs les angles α, β, γ, a pour expression :

$$L \cos \alpha + M \cos \beta + N \cos \gamma \ (17).$$

137. *On appelle quantité de mouvement d'un point matériel, le produit de sa masse par sa vitesse.* On le représente par un vecteur de longueur mv issu de la position du mobile, et auquel on donne la direction et le sens de la vitesse.

Les projections sur les axes de coordonnées sont :

$$m \frac{dx}{dt}, \ m \frac{dy}{dt}, \ m \frac{dz}{dt}.$$

Les formules du n° 15 déterminent ses moments par rapport aux axes et on en tire :

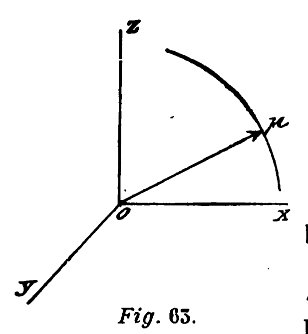


Fig. 63.

$$M_x mv = m\left(\frac{dz}{dt}\,y - \frac{dy}{dt}\,z\right),$$
$$M_y mv = m\left(\frac{dx}{dt}\,z - \frac{dz}{dt}\,x\right),$$
$$M_z mv = m\left(\frac{dy}{dt}\,x - \frac{dx}{dt}\,y\right).$$

La quantité de mouvement s'évalue en kilogrammes.

Construisons la courbe indicatrice de $\overline{mv}$ par rapport à l'origine des axes (32). Le mobile fictif qui décrirait cette courbe, de façon à occuper à chaque instant l'extrémité du vecteur équipollent à $\overline{mv}$, est dit l'*index* du mobile réel (*Fig.* 63).

Théorème. — *La force totale est à chaque instant équipollente à la vitesse de l'index sur la courbe indicatrice de la quantité de mouvement.*

Cela résulte des équations fondamentales (128) mises sous la forme :

$$\frac{d.m\frac{dx}{dt}}{dt} = X_t, \qquad \frac{d.m\frac{dy}{dt}}{dt} = Y_t, \qquad \frac{d.m\frac{dz}{dt}}{dt} = Z_t,$$

car $m\frac{dx}{dt}$, $m\frac{dy}{dt}$, $m\frac{dz}{dt}$ sont les coordonnées de l'index μ, puisque $\overline{o\mu} = \overline{mv}$.

Lorsque les seconds membres de ces équations sont des dérivées exactes, nous trouvons par intégration, trois intégrales premières des équations différentielles du mouvement.

138. Le moment de la quantité de mouvement d'un point matériel par rapport à un point fixe, est une fonction géométrique du temps, à laquelle correspond une courbe indicatrice, construite en prenant ce point comme pôle.

Théorème. — *Le moment de la force totale par rapport à un point fixe, est équipollent à la vitesse de l'index sur la courbe indicatrice du moment de la quantité de mouvement.*

En effet des valeurs de $M_x mv$, $M_y mv$, $M_z mv$ et des équations fondamentales du mouvement, on tire :

$$\frac{d.M_x mv}{dt} = m\frac{d^2z}{dt^2}y - m\frac{d^2y}{dt^2}z = Z_t y - Y_t z,$$
$$\frac{d.M_y mv}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}z - m\frac{d^2z}{dt^2}x = X_t z - Z_t x,$$
$$\frac{d.M_z mv}{dt} = m\frac{d^2y}{dt^2}x - m\frac{d^2x}{dt^2}y = Y_t x - X_t y.$$

Or $M_x mv$, $M_y mv$, $M_z mv$ sont les coordonnées de l'index, puisque $\overline{o\mu} = \overline{M_o mv}$ *(Fig 63)* ; les premiers membres de ces équations sont donc les vitesses projetées de ce mobile fictif, et les seconds membres sont les moments de la force totale par rapport aux axes.

Lorsque ce sont des dérivées exactes, l'intégration des équations précédentes donne trois intégrales premières du mouvement, qui remplaceront avantageusement les équations fondamentales (128). Le théorème suivant en offre un exemple remarquable.

139. Théorème des aires. — Supposons la force totale constamment dirigée vers un centre fixe appelé *centre d'action*. Elle est dite centrale et son moment par rapport au centre d'action est nul.

Il en est de même de la vitesse de l'index sur la courbe indicatrice du moment de la quantité de mouvement par rapport au centre fixe. De là le théorème : *Le moment de la quantité de mouvement d'un point matériel mobile qui subit l'action d'une force totale centrale, est constant par rapport au centre d'action et par rapport à tout axe passant par ce point.*

Si nous prenons le centre d'action pour origine, nous aurons avec les notations connues (136) :

$$\left.\begin{aligned} m\left(\frac{dz}{dt}y - \frac{dy}{dt}z\right) &= C &\quad \text{ou bien} \quad \frac{dz}{dt}y - \frac{dy}{dt}z &= 2a, \\ m\left(\frac{dx}{dt}z - \frac{dz}{dt}x\right) &= C' & \frac{dx}{dt}z - \frac{dz}{dt}x &= 2b, \\ m\left(\frac{dy}{dt}x - \frac{dx}{dt}y\right) &= C'' & \frac{dy}{dt}x - \frac{dx}{dt}y &= 2c. \end{aligned}\right\} (1)$$

Ce sont des intégrales premières des équations du mouvement. Multiplions la première par x, la seconde par y, la troisième par z, et additionnons les, il vient :

$$ax + by + cz = 0,$$

ce qui est une intégrale en quantités finies et représente un plan renfermant le centre d'action et la trajectoire. Si nous le prenons pour plan des XY, les équations (I) se réduisent à la relation :

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = 2\,C,$$

car les moments de la quantité de mouvement par rapport aux nouveaux axes des x et des y sont nuls. Mais il est démontré au nº 52 que :

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = r^2 \frac{d\theta}{dt},$$

par suite :

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta = C\,(t - t_0),$$

de là le théorème des aires : *Un point matériel auquel est appliqué une force totale centrale, décrit une trajectoire contenue dans un plan renfermant le centre d'action, et le rayon vecteur du mobile par rapport à ce point engendre des aires proportionnelles au temps.*

Réciproquement, si le rayon vecteur du mobile rapporté à un centre fixe, engendre une aire plane proportionnelle au temps, la direction de la force totale passe constamment par ce point.

Il est d'abord évident que la force totale, dirigée suivant l'accélération totale, est dans le plan de la trajectoire, considéré comme plan des XY. Or l'origine étant placée au centre fixe, on a par hypothèse :

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = c^{te}.$$

Le moment de la quantité de mouvement par rapport à l'axe des z est donc constant; par suite le moment de la force totale par rapport au même axe est nul et cette force passe par le centre fixe.

Remarque. Si la direction de la force totale rencontre constamment un axe fixe, le moment de la quantité de mouvement par rapport à cet axe est constant, et les aires décrites par le rayon vecteur de la projection du mobile, sur un plan perpendiculaire à l'axe, par rapport au pied de celui-ci, varient proportionnellement au temps.

140. Puissances des forces. — *On appelle puissance d'une force, le produit géométrique de la force par la vitesse de son point d'application.* Soit $\overline{V}$ la vitesse, $\overline{F}$ la force, la puissance $\overline{FV}$ est égale à FV cos FV (9). Elle s'évalue en fonction d'une unité spéciale : le cheval-vapeur (143). En vertu de la définition, les puissances ont toutes les propriétés des produits géométriques. Nous nous bornons à les énoncer.

1° *La puissance d'une force résultante est égale à la somme algébrique des puissances des composantes.*

2° *La puissance d'une force dont la vitesse du point d'application est résultante de vitesses simultanées, est égale à la somme algébrique des puissances de la force pour chacune des vitesses composantes* (9).

3° Soient X, Y, Z, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, les composantes de la force et de la vitesse du point d'application suivant trois axes rectangulaires, on a :

$$FV \cos \widehat{FV} = X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt} \quad (10).$$

141. Problème. — *On demande la somme des puissances de deux forces réciproques* $\overline{F}$ *et* — $\overline{F}$, *appliquées aux points* M *et* M_1 (*Fig.* 64).

Soient x, y, z, x_1, y_1, z_1, les coordonnées des points M et M_1; $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, $\frac{dx_1}{dt}$, $\frac{dy_1}{dt}$, $\frac{dz_1}{dt}$, les composantes de leurs vitesses; X, Y, Z, — X, — Y, — Z, les composantes des forces réciproques suivant les axes rectangulaires de coordonnées. En partant de ces notations, les puissances des forces $\overline{F}$ et — $\overline{F}$ sont :

Fig. 64.

$$X \frac{dx}{dt} + Y \frac{dy}{dt} + Z \frac{dz}{dt}, \quad -\left(X \frac{dx_1}{dt} + Y \frac{dy_1}{dt} + Z \frac{dz_1}{dt}\right),$$

d'où leur somme :

$$X \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right) + Y \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right) + Z \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_1}{dt}\right).$$

Mais si l désigne la distance MM_1 il vient :

$$X = F \frac{(x_1 - x)}{l}, \quad Y = F \frac{(y_1 - y)}{l}, \quad Z = F \frac{(z_1 - z)}{l},$$

et par suite l'expression précédente s'écrit :

$$F\left\{\frac{x_1-x}{l}\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx_1}{dt}\right)+\frac{y_1-y}{l}\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy_1}{dt}\right)+\frac{z_1-z}{l}\left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz_1}{dt}\right)\cdot\right\}$$

Or :

$$l=\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2},$$

d'où :

$$\frac{dl}{dt}=\frac{x_1-x}{l}\left(\frac{dx_1}{dt}-\frac{dx}{dt}\right)+\frac{y_1-y}{l}\left(\frac{dy_1}{dt}-\frac{dy}{dt}\right)+\frac{z_1-z}{l}\left(\frac{dz_1}{dt}-\frac{dz}{dt}\right).$$

La somme des puissances des deux forces réciproques est donc égales à $-F\frac{dl}{dt}$, expression qui s'annule si l est constant. Ce résultat s'applique aux produits géométriques de deux vecteurs réciproques, par les vitesses de leurs origines, car il est indépendant de la notion de force.

142. Théorème. — *La puissance d'une force dans un mouvement de rotation, est égale à la vitesse angulaire multipliée par le moment de la force par rapport à l'axe* (*Fig.* 65).

Prenons l'axe de la rotation pour axe des z et faisons passer le plan des XY par le point d'application de la force, dont les coordonnées sont (x,y,z). La puissance de la force (140) devient

$$X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt};$$

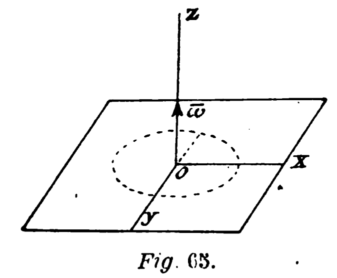


Fig. 65.

mais le mouvement étant une rotation $\bar{\omega}$ autour de OZ, les formules trouvées au n° 63 donnent :

$$\frac{dx}{dt}=qz-ry,\quad \frac{dy}{dt}=rx-pz,.$$

dans lesquelles :

$$p=0,\quad q=0,\quad r=\omega,\quad z=0$$

et il vient :

$$X\frac{dx}{dt}+Y\frac{dy}{dt}=\omega\,(Yx-Xy)=\omega\,N.\ (\text{n}^\circ\ 15).$$

143. *On appelle force vive d'un point matériel mobile, le produit* mv^2 *de sa masse par le carré de sa vitesse.* Cette expression,

essentiellement positive, n'est pas susceptible d'une représentation géométrique : on ne peut lui attribuer de *sens*.

On appelle travail d'une force entre deux époques, l'intégrale par rapport au temps de la puissance prise entre les mêmes limites. Il est donné par la formule :

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{FV} \cos \widehat{\mathrm{FV}}\, dt.$$

Si l'on tient compte de la relation $\frac{ds}{dt} = \mathrm{V}$, il vient en changeant de variable :

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{FV} \cos \widehat{\mathrm{FV}}\, dt = \int_{s_0}^{s} \mathrm{F} \cos \widehat{\mathrm{FV}}\, ds,$$

donc si F en grandeur et en direction, n'est fonction que de la position du mobile, le travail est indépendant du temps mis par le point d'application, pour passer de la position M_0 définie par l'arc s_0, à la position M définie par s.

Lorsque la force est constante, il vient :

$$\int_{s_0}^{s} \mathrm{F} \cos \widehat{\mathrm{FV}}\, ds = \mathrm{F} \int_{s_0}^{s} \cos \widehat{\mathrm{FV}}\, ds;$$

or, $\int_{s_0}^{s} \cos \mathrm{FV}\, ds$ est la projection du déplacement du point d'application sur la direction de la force; par conséquent *le travail développé par une force constante, entre deux époques, est égal au produit du déplacement du point d'application projeté sur la direction de la force, par la grandeur de celle-ci. Il est positif ou négatif, selon que le déplacement a le sens de la force ou lui est opposé.*

Toutes les propriétés des produits géométriques sont communes aux puissances et aux travaux; ainsi le travail d'une résultante est la somme des travaux des composantes.

La puissance s'exprime en fonction du travail comme la vitesse en fonction de l'espace. Elle est égale au travail qui serait développé par la force pendant une seconde, si à partir de l'instant considéré, celle-ci devenait constante, en même temps que la vitesse de son point d'application.

L'unité de travail est le *kilogrammètre*. C'est le travail obtenu en élevant un poids de un kilogramme à un mètre de hauteur.

L'unité de puissance, appelée *cheval-vapeur*, équivaut à un travail de 75 kilogrammètres par seconde.

Dans le système C. G. S. l'unité de travail est l'*erg*; c'est le travail produit par une *dyne* agissant sur une longueur de un centimètre suivant sa direction. L'unité de puissance, qui prend le nom de *Watt*, est égale à un travail de $\frac{1}{9,81}$ kilogrammètre par seconde.

Nous verrons en mécanique appliquée que la puissance et le travail représentent la valeur et l'effet industriels d'une force.

144. Théorème de la force vive. — *L'accroissement de la force vive d'un point matériel entre deux époques est égal au travail de la force totale pendant le même temps.*

En effet, la puissance de cette force est :

$$X_t \frac{dx}{dt} + Y_t \frac{dy}{dt} + Z_t \frac{dz}{dt},$$

dans laquelle :

$$X_t = m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y_t = m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z_t = m \frac{d^2z}{dt^2}, \qquad (128)$$

et par suite :

$$X_t \frac{dx}{dt} + Y_t \frac{dy}{dt} + Z_t \frac{dz}{dt} = m \left(\frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt} \frac{d^2z}{dt^2} \right).$$

Or :

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

et

$$\frac{d(v^2)}{dt} = 2 \left(\frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt} \frac{d^2z}{dt^2} \right).$$

Nous aurons donc :

$$X_t \frac{dx}{dt} + Y_t \frac{dy}{dt} + Z_t \frac{dz}{dt} = \frac{m}{2} \frac{d(v^2)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(mv^2)}{dt}.$$

D'où le théorème :

La $\frac{1}{2}$ dérivée de la force vive d'un point matériel est égale à la puissance de la force totale.

L'intégration de cette équation différentielle donne :

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \int_{t_0}^{t} \left(X_t \frac{dx}{dt} + Y_t \frac{dy}{dt} + Z_t \frac{dz}{dt} \right) dt,$$

ce qui s'énonce encore comme suit :

L'accroissement de la demi-force vive d'un point mobile entre deux époques, est égal au travail de la force totale pendant le même temps.

La force vive a donc la même unité que le travail. Ainsi un point pesant 20 kilogrammes, animé d'une vitesse de 100^m par seconde, aurait une force vive de $\frac{20}{g} \times (100)^2$ ou 20387 kilogrammètres.

145. Si l'une des forces est normale à la trajectoire, son travail est nul et elle n'intervient pas dans l'équation de la force vive. Tel est le cas de la réaction développée par une courbe ou une surface indéformable et sans frottement. En général *les travaux des forces de liaison sont nuls, si les liaisons sont indépendantes du temps.*

Soit $L(x,y,z) = 0$, l'équation d'une liaison de cette nature ; sa dérivée partielle $\frac{dL}{dt}$ est nulle par hypothèse, et la dérivée totale par rapport au temps devient :

$$\frac{dL}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dL}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{dL}{dz}\frac{dz}{dt} = 0;$$

or nous admettons que la réaction est normale à la surface $L(x,y,z) = 0$ (127), ses composantes sont donc de la forme $\lambda \frac{dL}{dx}$, $\lambda \frac{dL}{dy}$, $\lambda \frac{dL}{dz}$, et sa puissance est nulle puisqu'elle est donnée par la formule :

$$\lambda \left(\frac{dL}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dL}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{dL}{dz}\frac{dz}{dt} \right).$$

146. Intégrale de la force vive. — Le théorème de la force vive prend une forme remarquable quand la puissance de la force totale est la dérivée totale d'une fonction $\varphi(x,y,z)$, qui ne renferme pas explicitement le temps. Dans cette hypothèse :

$$X_t = \frac{d\varphi}{dx}, \quad Y_t = \frac{d\varphi}{dy}, \quad Z_t = \frac{d\varphi}{dz}.$$

Cette fonction, dite *fonction des forces*, n'existe que si la force totale dépend exclusivement de la position du mobile, en même

temps que ses projections sur les axes rectangulaires sont les dérivées partielles par rapport à x, y, z, d'une fonction de ces trois variables.

Les travaux des forces de liaison, si celles-ci existent, sont supposés nuls, et les forces directement appliquées ont une fonction des forces.

Soient x, y, z, x_0, y_0, z_0, les coordonnées du mobile aux époques t et t_0, le théorème de la force vive devient :

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \varphi(x,y,z) - \varphi(x_0,y_0,z_0).$$

Cette équation, connue sous le nom d'*intégrale de la force vive*, a la propriété de déterminer la grandeur de la vitesse par la position du mobile : chaque fois qu'il passe par la même position, sa vitesse reprend la même grandeur.

Si le point matériel est sollicité par plusieurs forces, pour chacune desquelles il y a une fonction, la puissance de la résultante sera de la forme $\Sigma\left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{d\varphi}{dz}\frac{dz}{dt}\right)$ et cette force aura une fonction $\Sigma\varphi$.

147. **Des surfaces de niveau.**— L'équation : $\varphi(x,y,z) = C$, dans laquelle C est un paramètre arbitraire, représente une infinité de surfaces *dites de niveau*, qui jouissent des propriétés suivantes :

1° *Par chaque point de l'espace passe une surface de niveau et n'en passe qu'une seule.*

Soient M_0 un point, x_0, y_0, z_0, ses coordonnées, C_0 la valeur correspondante de la fonction des forces. La surface de niveau $\varphi(x,y,z) = C_0$ passe par M_0 et il n'en passe pas d'autre, si la fonction φ ne prend qu'une seule valeur pour les coordonnées x_0, y_0, z_0. En effet, la position M_0 étant sur les deux surfaces de niveau déterminées par les paramètres C_0 et C'_0, il en résulterait pour $\varphi(x,y,z)$ deux valeurs différentes.

2° *A chaque surface de niveau correspond une valeur de la force vive du mobile, indépendante du temps et de la trajectoire décrite.* Cela résulte de l'intégrale de la force vive.

3° *La force totale est normale en chaque point, à la surface de niveau correspondante*, c'est ce qu'établissent les relations :

$$\frac{X_t}{\frac{d\varphi}{dx}} = \frac{Y_t}{\frac{d\varphi}{dy}} = \frac{Z_t}{\frac{d\varphi}{dz}}.$$

148. **Positions d'équilibre du point matériel mobile.** — La force vive et la fonction des forces passent par un maximum ou un minimum, quand la dérivée totale de la fonction et par conséquent la force totale s'annulent.

Dans cette hypothèse :

$$X_t = \frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad Y_t = \frac{d\varphi}{dy} = 0, \quad Z_t = \frac{d\varphi}{dz} = 0,$$

et la position correspondante est d'équilibre (131). Donc : *les positions d'équilibre du mobile se trouvent sur les surfaces de niveau pour lesquelles la fonction des forces est maximum ou minimum.* Il sera démontré que l'équilibre est stable dans le premier cas et instable dans le second.

149. **Du Potentiel.** — La fonction des forces passe généralement par plusieurs maximums. Si nous considérons le maximum maximorum (M_a) obtenu pour certaines valeurs x_1, y_1, z_1 des coordonnées, la différence $M_a - \varphi(x,y,z)$ est nécessairement positive et plus grande que toute autre différence $\varphi(x_n,y_n,z_n) - \varphi(x, y, z)$.

A ce maximum correspond l'équilibre le plus stable possible, que nous qualifions d'absolu, et les expressions précédentes représentent les travaux développés par la force, quand le mobile passe de la position (x, y, z) à la position d'équilibre absolu ou bien de la position (x,y,z) à la position (x_n,y_n,z_n). Le premier travail, toujours plus grand que le second, est dit le *potentiel.* C'est donc le travail *maximum, nécessairement positif, développé par la force, quand son point d'application passe de la position donnée à la position d'équilibre du plus grand maximum de la fonction des forces.*

Posons le potentiel $M_1 - \varphi(x,y,z) = \pi(x,y,z)$. Il dépend exclusivement des coordonnées du mobile et ne diffère de la fonction des forces que par le signe toujours positif, et par la constante. Ses dérivées partielles sont égales et de signes contraires aux dérivées partielles de cette dernière.

Nous avons par conséquent :

$$\frac{d\pi}{dx} = -\frac{d\varphi}{dx} = -X_t,$$

$$\frac{d\pi}{dy} = -\frac{d\varphi}{dy} = -Y_t, \quad \frac{d\pi}{dz} = -\frac{d\varphi}{dz} = -Z_t.$$

Tout ce qui est dit de la fonction des forces, s'applique au potentiel. S'il arrive donc qu'un point matériel soit soumis à l'action de plusieurs forces ayant chacune un potentiel, la résultante a pour potentiel la somme des potentiels des composantes.

150. **Application.** — *On donne un point matériel de masse* m *soumis à la seule action de la pesanteur. On demande la fonction des forces, les surfaces de niveau, l'intégrale de la force vive et le potentiel.*

Dirigeons l'axe des z positif suivant la verticale descendante et faisons passer le plan horizontal des XY, par la position la plus basse accessible au mobile. Nous avons :

$$X_t = 0, \quad Y_t = 0, \quad Z_t = mg.$$

La puissance est donc $mg\,\frac{dz}{dt}$ et la fonction des forces mgz; celle-ci est négative pour les valeurs de z, dans toutes les positions du mobile ; le maximum de la fonction des forces est zéro et le potentiel — (mgz) est positif.

Les surfaces de niveau données par l'équation $mgz = C^{te}$, sont des plans horizontaux. Enfin l'intégrale de la force vive devient :

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{z_0}^{z} mgdz, \text{ ou } v^2 = v_0^2 + 2g\,(z - z_0).$$

151. *On donne un point matériel soumis à l'action d'une force centrale, fonction de la distance du mobile au centre. On demande la fonction des forces, etc.*

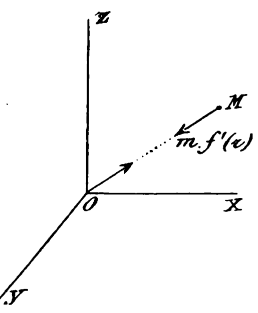


Fig 66

Soient O le centre fixe, M le point matériel, r la longueur MO, $mf'(r)$ l'intensité de la force qui le sollicite, considérée positivement ou négativement, suivant qu'il y a attraction ou répulsion. (*Fig.* 66).

La somme des puissances de la force centrale et de la réaction réciproque développée sur le centre O, est égale à $-\,mf'(r)\,\frac{dr}{dt}$ (141) ; mais ce point étant fixe, cette formule donne la puissance de la force centrale. La fonction des forces est donc $-\,mf(r)$ et les surfaces de niveau sont des sphères concentriques au centre

d'action. Enfin le potentiel a pour expression $M_a + mf(r)$, M_a étant le maximum de $- mf(r)$.

Supposons la force centrale proportionnelle au produit des masses m et μ, du centre d'action et du point, et en raison inverse du carré de la distance qui les sépare.

Soit f l'action réciproque de deux masses unités placées à l'unité de distance. L'intensité de la force centrale, sa puissance, sa fonction des forces et son potentiel sont respectivement

$$\frac{fm\mu}{r^2}, \quad - \frac{fm\mu}{r^2}\frac{dr}{dt}, \quad \frac{fm\mu}{r}, \quad M_a - \frac{fm\mu}{r}.$$

Les surfaces de niveau sont des sphères déterminées par l'équation

$$\frac{fm\mu}{r} = c^{te}.$$

S'il y a attraction, f est positif et $M_a - \frac{fm\mu}{r}$ est le travail de la force quand son point d'application passe de la position donnée à la position d'équilibre absolu qui est au centre d'action; pour ce point la fonction des forces est infinie, et il n'y a plus de maximum au sens analytique du mot. On convient alors d'appeler potentiel le travail $\frac{f\mu m}{r}$ que développerait la force sur le point mobile, partant de l'infini pour arriver à la distance r du centre fixe.

S'il y a répulsion, la position d'équilibre est à une distance infinie du centre; f est négatif, M_a est nul et le potentiel est $- \frac{fm\mu}{r}$.

152. Définitions de Rankine. — On donne le nom d'*énergie* à tout ce qui peut se transformer en travail. Il y a lieu, en physique, d'indiquer les formes différentes qu'elle peut présenter, mais nous nous bornerons dans ce cours à considérer les deux formes de l'énergie mécanique : le travail proprement dit et la force vive.

Rankine donne à $\frac{1}{2} mv^2$ le nom d'*énergie cinétique,* à la fonction π le nom d'*énergie potentielle* et il appelle *énergie totale* l'expression $\frac{1}{2} mv^2 + \pi$. Ces définitions permettent d'énoncer sous une forme très simple, l'intégrale de la force vive. Cette équation s'écrit en effet :

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = (M_a - \varphi_0) - (M_a - \varphi),$$

c'est-à-dire :

$$\left(\frac{mv^2}{2} + \pi\right) = \left(\frac{mv_0^2}{2} + \pi_0\right).$$

Donc : *L'énergie totale du point matériel est constante ;* l'énergie cinétique et l'énergie potentielle sont complémentaires ; une augmentation de l'une, entraîne une diminution égale de l'autre.

Fig 67.

Soit, par exemple, un point matériel pesant, abandonné en A (*Fig.* 67), sans vitesse initiale, à l'action de la pesanteur supposée constante. A cette époque son énergie cinétique est nulle ; son énergie potentielle est le travail développé par le poids mg du point depuis la position A jusqu'au plan horizontal qui limite la chute du mobile ; elle a pour valeur mgH si H est la plus courte distance du point A au plan. Cette expression donne également l'énergie totale du mobile. Celui-ci arrive en B après être tombé de la hauteur h'. Dans cette position, sa vitesse, son énergie cinétique et son énergie potentielle, sont respectivement :

$$v', \ \frac{mv'^2}{2}, \ mg(H - h').$$

l'énergie totale est donc la somme $\frac{mv'^2}{2} + mg(H - h')$ et vaut mgH, puisque $v'^2 = 2gh'$ (nº 150).

CHAPITRE XV

ÉTUDE DU MOUVEMENT RECTILIGNE DU POINT MATÉRIEL LIBRE

153. Le mouvement du point matériel est rectiligne quand la force totale a une direction constante, qui se confond avec celle de la vitesse initiale. Dans cette hypothèse, l'accélération totale se réduit à l'accélération tangentielle et la force totale est égale à $m\frac{dv}{dt}$.

Pour étudier le mouvement on prend l'axe des x suivant la direction de la trajectoire, et on écrit la seule équation du mouvement ; le problème est donc ramené à l'intégration d'une équation différentielle du second ordre de la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f\left(t,\ x\ \frac{dx}{dt}\right),$$

Il arrive que la force ne soit fonction que d'une des variables $t, x, \frac{dx}{dt}$; de là différents cas particuliers plus simples, qu'on résout par l'une des méthodes suivantes.

1° La force dépend du temps et on a :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = f\ (t).$$

Les circonstances initiales du mouvement sont la vitesse v_0 et l'abscisse x_0 à l'époque initiale. En intégrant la relation précédente, il vient :

$$v = v_0 + \int_0^t f\ (t)\ dt = v_0 + \varphi\ (t),$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \varphi\ (t), \quad x = x_0 + v_0\ t + \int_0^t \varphi\ (t)\ dt\ ;$$

la vitesse et la position du mobile sont donc déterminées en fonction du temps.

154. La force est fonction de v :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = f\ (v),$$

d'où :

$$(1) \quad t = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{f(v)}, = \psi\ (v).$$

De cette relation on tire explicitement :

$$v = \varphi\ (t) \ \text{ ou } \ \frac{dx}{dt} = \varphi\ (t),$$

$$x = x_0 + \int_0^t \varphi\ (t)\ dt.$$

Si les difficultés du calcul ne permettent pas d'obtenir v, on met l'équation du mouvement sous la forme :

$$\frac{dv}{dx}\ \frac{dx}{dt} = f\ (v),$$

d'où :

$$\frac{dv}{dx} = \frac{f\ (v)}{v}, \quad x = x_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{vdv}{f\ (v)}.$$

Cette équation fait système avec la relation (1) et l'élimination de v, conduit à la détermination de x en fonction du temps.

155. La force est fonction de x, c'est-à-dire :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x).$$

Il y a donc fonction des forces et le théorème de la force vive est tout indiqué pour résoudre le problème. On a :

$$v^2 = v_0^2 + 2\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx \text{ ou } \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = v_0^2 + 2\,\varphi(x),$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{v_0^2 + 2\,\varphi(x)}.$$

Le radical est positif, si x et t varient tous deux positivement ou tous deux négativement. Il vient en intégrant :

$$t = \pi(x)$$

d'où :

$$x = \psi(t), \quad \frac{dx}{dt} = v = \psi'(t)$$

c'est-à-dire la vitesse et la position du mobile en fonction du temps.

156. **Problème.** — *On donne un point matériel abandonné en* A *sans vitesse initiale à l'action d'un centre fixe qui l'attire proportionnellement à la distance. On demande son mouvement.*

La vitesse initiale étant nulle et la force constamment dirigée vers le centre O, la trajectoire est rectiligne et a la direction de la droite qui joint le point O à la position initiale A du mobile (*Fig.* 68). Dirigeons l'axe OX positif suivant OA. A l'instant initial le point matériel est en A et OA $= x_0$; à l'époque t il est en M, et OM $= x$. Le centre O développe, sur l'unité de masse placée à l'unité de distance, une attraction dont l'intensité est K^2, de sorte que le point matériel arrivé en M, subit une action égale à mK^2x. Elle est de signe contraire à l'abscisse du point et $X_t - = mK^2x$.

Fig. 68.

La force totale n'étant fonction que de x, il convient d'appliquer la méthode exposée et il vient :

$$\frac{mv^2}{2} - 0 = -\int_{x_0}^{x} mK^2x\,dx,$$

$$v^2 = K^2 (x_0^2 - x^2) \text{ ou } v = -\frac{dx}{dt} = -K\sqrt{x_0^2 - x^2}.$$

En intégrant cette équation on a :

$$Kt = \text{arc cos } \frac{x}{x_0} + c^t ;$$

or à l'instant initial $t = 0$, $x = x_0$, $v = v_0$, d'où $c^{te} = 0$ et par suite :

$$Kt = \text{arc cos } \frac{x}{x_0}, \quad x = x_0 \cos Kt, \quad \frac{dx}{dt} = -Kx_0 \sin Kt.$$

La position du mobile, ainsi que sa vitesse, sont donc déterminées en fonction du temps. Les valeurs trouvées prouvent que le mouvement est oscillatoire périodique, la durée de l'oscillation complète étant $\frac{2\pi}{K}$, et l'amplitude du déplacement $2x_0$.

Dans les corps élastiques, une molécule écartée de sa position d'équilibre, y est ramenée par une force proportionnelle à la distance et les lois précédentes sont applicables.

157. *On donne un point matériel pesant abandonné sans vitesse dans un milieu développant une résistance proportionnelle au carré de la vitesse. On demande son mouvement.*

Le poids du point, sa vitesse, la résistance du milieu opposée à la vitesse, sont dirigés suivant la verticale et la trajectoire sera par conséquent la verticale OX de la position initiale O (*Fig.* 69). Prenons-la pour axe des x positifs dans le sens de g. A l'époque t le mobile est en M, son abscisse est x, sa vitesse v, et la résistance du milieu peut se mettre sous la forme $-mg\frac{v^2}{K^2}$. La force totale $mg\left(1 - \frac{v^2}{K^2}\right)$ est donc fonction de la vitesse (154) et nous mettrons l'équation du mouvement sous la forme :

O

M

x

Fig. 69.

$$m\frac{dv}{dt} = mg\left(1 - \frac{v^2}{K^2}\right).$$

On en tire :

$$\frac{2g}{K} = \frac{\frac{dv}{dt}}{K + v} + \frac{\frac{dv}{dt}}{K - v}, \quad gt = \frac{K}{2} \log_n \frac{K + v}{K - v} + c^{te},$$

or pour $t = 0$, $v = 0$, par suite $c^{te} = 0$, et l'équation précédente devient en passant aux nombres :

$$e^{\frac{2gt}{K}} = \frac{K + v}{K - v},$$

d'où :

$$v = \frac{dx}{dt} = K \frac{e^{\frac{2gt}{K}} - 1}{e^{\frac{2gt}{K}} + 1}.$$

Il suffit de multiplier le numérateur et le dénominateur du second membre de cette équation par $\frac{g}{K} e^{-\frac{gt}{K}}$ pour obtenir une dérivée exacte. Elle donne par intégration :

$$x = \frac{K^2}{g} \log_n \left(e^{\frac{gt}{K}} + e^{-\frac{gt}{K}}\right) + c^{te},$$

mais pour $t = 0$, $x = 0$, donc $c^{te} = -\frac{K^2}{g} \log_n 2$ et on trouve :

$$x = \frac{K^2}{g} \log_n \frac{1}{2} \left(e^{\frac{gt}{K}} + e^{-\frac{gt}{K}}\right).$$

Il est à remarquer que pour t tendant vers l'infini on a :

$$\lim (v)_{t \equiv \infty} = K.$$

Le mouvement tend donc à devenir uniforme, ce que l'on conçoit aisément, puisque le poids du point est constant, tandis que la résistance du milieu croît avec la vitesse vers une limite — mg.

158. *Même problème, mais le point matériel est lancé vers le haut avec la vitesse verticale* v_0.

Conservons les notations et les axes du problème précédent. (*Fig.* 70). La vitesse v est négative, la résistance du milieu positive, et la force totale est égale à $mg\left(1 + \frac{v^2}{K^2}\right)$, d'où l'équation :

$$\frac{dv}{dt} = g\left(\frac{v^2 + K^2}{K^2}\right) \text{ ou bien : } \frac{dv}{dt}\left(\frac{K}{K^2 + v^2}\right) = \frac{g}{K}.$$

En l'intégrant on trouve :

$$\frac{gt}{K} = \text{arc } tg \frac{v}{K} + c^{te},$$

or, pour $t = 0$, $v = -v_0$ et par suite $c^{te} = \text{arc } t_g \frac{v_0}{K}$; posons :

$$\text{arc } tg \frac{v_0}{K} = p, \quad \text{arc } t_g \frac{v}{K} = q,$$

il vient successivement :

$$\frac{gt}{K} = p + q, \text{ ou } q = \frac{gt}{K} - p,$$

$$tg\, q = \frac{tg \frac{gt}{K} - tg\, p}{1 + tg\, p\, tg \frac{gt}{K}} \text{ ou : (1) } \frac{v}{K} = \frac{K \sin \frac{gt}{K} - v_0 \cos \frac{gt}{K}}{K \cos \frac{gt}{K} + v_0 \sin \frac{gt}{K}},$$

équation immédiatement intégrable, qui donne :

$$x = -\frac{K^2}{g} \log_n \left(K \cos \frac{gt}{K} + v_0 \sin \frac{gt}{K}\right) + c^{te};$$

mais pour $t = 0$, $x = 0$ et $c^{te} = \frac{K^2}{g} \log_n K$, donc :

$$(2) \quad x = \frac{K^2}{g} \log_n \frac{K}{K \cos \frac{gt}{K} + v_0 \sin \frac{gt}{K}}.$$

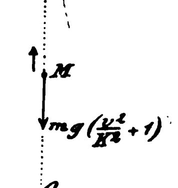


Fig. 70.

Les équations (1) et (2) conviennent jusqu'à l'instant t_1 pour lequel la vitesse s'annule ; on le détermine par la relation :

$$K \sin \frac{gt_1}{K} - v_0 \cos \frac{gt_1}{K} = 0, \text{ ou } t_g \frac{gt_1}{K} = \frac{v_0}{K}.$$

La plus petite racine positive de cette équation satisfait au problème et la position contemporaine du mobile résulte de la formule :

$$x_1 = \frac{K^2}{g} \log_n \frac{K}{K \cos \frac{gt_1}{K} + v_0 \sin \frac{gt_1}{K}} = \frac{K^2}{g} \log_n \frac{K}{\sqrt{K^2 + V_0^2}}.$$

Le mobile retombe ensuite et la chute se fait suivant la loi trouvée au numéro précédent.

CHAPITRE XVI

MOUVEMENT PLAN DU POINT MATÉRIEL

159. La trajectoire du mobile est plane quand la force totale reste située dans le plan déterminé par les directions initiales de la force totale et de la vitesse.

Problème. — *On donne un point matériel animé de la vitesse initiale* $\overline{V}_0$ *et soumis à la force constante* $\overline{F}$. *On demande son mouvement.*

Les conditions précédentes sont remplies et le mouvement se fait dans le plan de $\overline{V}_0$ et de $\overline{F}$. Si nous prenons pour force totale la pesanteur, nous ne changerons pas le problème proposé, mais nous aurons l'avantage d'étudier directement le mouvement du point matériel pesant dans le vide. Nous le rapportons à trois axes rectangulaires dont l'origine est la position initiale, nous prenons pour plan des XY le plan vertical de la trajectoire, et l'axe des y parallèle et de même sens que g. (*Fig.* 71).

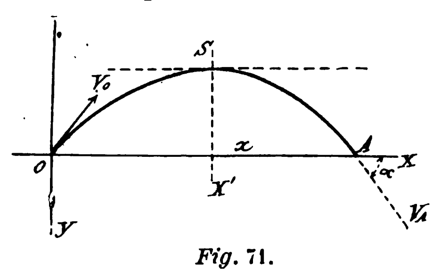


Fig. 71.

Les équations du mouvement (128) deviennent :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = g, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Soient V_0 la vitesse initiale, α l'angle qu'elle fait avec l'axe des x, on a :

$$\frac{dx}{dt} = c^{te} = V_0 \cos \alpha, \quad x = V_0 t \cos \alpha + c^{te} = V_0 t \cos \alpha,$$

$$\frac{dy}{dt} = gt + c^{te} = gt - V_0 \sin \alpha,$$

$$y = \frac{gt^2}{2} - V_0 t \sin \alpha + c^{te} = \frac{gt^2}{2} - V_0 t \sin \alpha,$$

$$\frac{dz}{dt} = 0, \quad z = 0,$$

car à l'instant initial $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = V_0 \cos \alpha$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = - V_0 \sin \alpha$, $x_0 = 0$, $y_0 = 0$.

L'élimination de t entre x et y donne l'équation de la trajectoire :

$$(1) \quad y = - x tg \alpha + \frac{g x^2}{2 V_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

C'est une parabole qui a son axe vertical et de même sens que g.

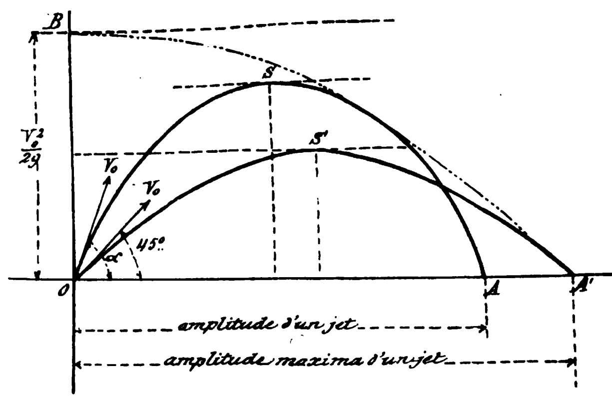


Fig. 72.

Les coordonnées du sommet sont :

$$x_1 = \frac{V_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}, \quad y_1 = - \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

On appelle portée la distance de l'origine au second point de rencontre de la trajectoire avec l'axe OX. Elle se détermine en faisant $y = 0$ dans l'équation (1), ce qui donne :

$$\frac{V_0^2}{g} \sin 2\alpha.$$

La portée est maximum pour $\alpha = 45°$; elle diminue pour les valeurs plus grandes (*Fig.* 72); par contre, la flèche de la trajectoire, mesurée par la valeur absolue de y_1, croît jusqu'à ce que $\alpha = 90°$.

Il est à remarquer que la force totale mg, a une fonction des forces (150); la vitesse prend donc la même valeur absolue aux deux points situés sur une horizontale, et fait avec OX le même angle.

Parabole de sûreté. — *On donne le nom de parabole de sûreté à l'enveloppe des paraboles obtenues en faisant varier*

l'angle α sous lequel est lancé le mobile, tout en conservant à la vitesse initiale sa valeur. L'équation de cette courbe s'obtient en éliminant α entre l'équation de la trajectoire et sa dérivée par rapport à α. On trouve :

$$y = \frac{gx^2}{2V_0^2} - \frac{V_0^2}{2g};$$

c'est une parabole, dite de *sûreté*, car un point extérieur à cette courbe ne peut être atteint, quelle que soit l'inclinaison de la vitesse initiale constante V_0 (*Fig.* 72). On le vérifie en déterminant l'angle sous lequel il faut lancer le mobile pour arriver au point quelconque $(x_1\ y_1)$, ce qui résulte de l'équation :

$$y_1 = \frac{gx_1^2}{2V_0^2}(1 + tg^2\,\alpha) - x_1\,tg\,\alpha,$$

d'où :

$$tg\,\alpha = \frac{V_0^2}{gx_1} \pm \frac{1}{x_1}\sqrt{\frac{2V_0^2}{g}\left(y_1 + \frac{V_0^2}{2g} - \frac{gx_1^2}{2V_0^2}\right)}.$$

Suivant que

$$y_1 + \frac{V_0^2}{2g} - \frac{gx_1^2}{2V_0^2} \gtreqless 0,$$

il y a deux, une ou pas de valeur réelle pour α. Dans la première hypothèse le point (x_1, y_1) est à l'intérieur de la parabole de sûreté, dans la seconde il est sur cette courbe et dans la troisième il est à l'extérieur.

160. **Problème.** — *On donne un point matériel animé de la vitesse initiale* $\overline{V_0}$ *et qui subit l'action d'une force centrale, fonction de la distance du point au centre d'action. On demande le mouvement qu'il prend.*

Le théorème des aires (139) prouve que la trajectoire est dans le plan déterminé par la vitesse initiale et le centre d'action.

Par ce point et dans ce plan, menons deux axes perpendiculaires OX et OY (*Fig.* 73). Soient M la position du mobile à l'époque t, r son rayon vecteur, $mf'(r)$ l'intensité de la force centrale qu'il subit et dont les projections sont $-mf'(r)\frac{x}{r}$, $-mf'(r)\frac{y}{r}$. De là les équations :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mf'(r)\frac{x}{r}, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = -mf'(r)\frac{y}{r}.$$

Dans chaque cas particulier, on examinera si les théorèmes généraux, et en particulier les théorèmes des aires et de la force vive, ne donnent pas des équations plus facilement intégrables, que l'on substituera aux précédentes.

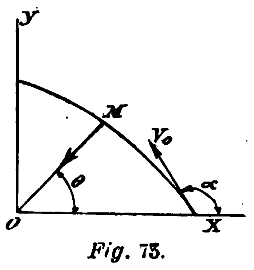


Fig. 73.

161. Applications. — *Mouvement d'un point matériel animé de la vitesse initiale* V_0 *et soumis à l'attraction d'un centre qui agit en raison directe de la distance* (*Fig.* 73).

Nous avons par hypothèse $f'(r) = K^2 r$ et les équations du mouvement sont :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -K^2x \quad \text{ou bien} \quad \frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = -K^2x\frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -K^2y \quad \text{»} \quad \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} = -K^2y\frac{dy}{dt}.$$

En intégrant nous trouvons :

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 &= C^2 - K^2x^2 \quad \text{ou} \quad \frac{dx}{dt} = -\sqrt{C^2 - K^2x^2}, \\ \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= C'^2 - K^2y^2 \quad \text{»} \quad \frac{dy}{dt} = +\sqrt{C'^2 - K^2y^2}, \end{aligned}\right\} \text{(I)}$$

Pour déterminer les constantes C^2, C'^2 admettons que l'axe OX passe par la position initiale et soit perpendiculaire à $\overline{V_0}$.

A l'époque $t = 0$, on a : $x = x_0, y = 0, \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = 0, \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = V_0$;

d'où : $$C^2 = K^2x_0^2, \quad C'^2 = V_0^2$$

et l'intégration des équations (I) donne :

$$Kt = \text{arc cos}\frac{x}{x_0} + C_1, \quad Kt = \text{arc sin}\frac{Ky}{V_0} + C'_1,$$

$$\text{pour } t = 0, \quad x = x_0, \quad y = 0. \quad C_1 = 0, \quad C'_1 = 0.$$

L'équation de la trajectoire s'obtient en éliminant t entre ces expressions; ce qui se fait facilement au moyen de la relation $\sin^2 Kt + \cos^2 Kt = 1$. Il vient :

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{Ky}{V_0}\right)^2 = 1.$$

C'est une ellipse rapportée à ses axes; ils ont pour longueurs $2\,x_0$ et $2\,\frac{V_0}{K}$.

La durée T d'une révolution se détermine en observant qu'elle est accomplie quand x reprend la valeur x_0, c'est-à-dire pour

$$Kt = 0, \quad Kt = 2\pi, \quad Kt = 4\pi \ldots$$

On a donc :

$$T = \frac{2\pi}{K}.$$

162. ***On donne un point matériel animé d'une vitesse initiale*** V_0 ***et soumis à l'attraction d'un centre qui agit en raison inverse du carré de la distance. On demande son mouvement.***

Dans cette hypothèse nous pouvons poser $f'(r) = \frac{K^2}{r^2}$ et les équations du mouvement (160) s'écrivent :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K^2x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{K^2y}{r^3}.$$

Elles s'intègrent au moyen d'une variable auxiliaire qui est l'angle θ fait par le rayon vecteur avec OX positif (*Fig.* 73). Des trois relations

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad r^2\frac{d\theta}{dt} = A,$$

déduites, les deux premières de la figure, la dernière du théorème des aires, on tire $x, y, \frac{1}{r^2}$ et les équations du mouvement deviennent :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K^2}{A}\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}, \text{ d'où : } \frac{dx}{dt} = -\frac{K^2}{A}\sin\theta + C',$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{K^2}{A}\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt}, \text{ d'où : } \frac{dy}{dt} = \frac{K^2}{A}\cos\theta + C.$$

Mais pour

$$t = 0, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = V_0\cos\alpha, \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = V_0\sin\alpha.$$

et par suite :

$$C' = V_0\cos\alpha, \quad C = V_0\sin\alpha - \frac{K^2}{A}.$$

Remplaçons $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, par leurs valeurs dans la dernière équation du nº 52 et posons $\frac{C'}{C} = tg\gamma$; nous obtiendrons :

$$r = \frac{\frac{A^2}{K^2}}{1 + \frac{AC}{K^2}\frac{\cos(\theta+\gamma)}{\cos\gamma}},$$

équation polaire d'une conique rapportée à son foyer. Prenons pour axe polaire le grand axe de la courbe ; il est perpendiculaire à la vitesse au sommet correspondant, où nous supposons la position initiale. Dans ces conditions $\cos\alpha$ et par suite C' et γ s'annulent et il vient :

$$r = \frac{\frac{A^2}{K^2}}{1 + \frac{AC}{K^2}\cos\theta},$$

équation qui montre que l'excentricité est $\frac{AC}{K^2}$. Suivant que $\frac{AC}{K^2} \gtreqless 1$, la courbe est une hyperbole, une parabole ou une ellipse.

Déterminons les principaux éléments d'une trajectoire elliptique. Soient $2a$, $2b$, le grand et le petit axe de la courbe. Le premier est la demi-somme des rayons vecteurs maximum et minimum, par rapport au foyer pris comme origine. Donc :

$$a = \frac{A^2K^2}{K^4 - A^2C^2}, \quad b = a\sqrt{1-e^2} = \frac{A}{K}\sqrt{a}.$$

Dans l'hypothèse d'une trajectoire circulaire, $\frac{AC}{K^2} = 0$; or A et K sont nécessairement différents de zéro et limités, donc :

$$C = V_0 - \frac{K^2}{A} = 0. \text{ (1)}$$

163. **Théorème.** — *Les carrés des temps des révolutions de points matériels décrivant des ellipses, sous l'action d'un centre,*

(1) Nous avons vu aux nos 161 et 162 que le mouvement elliptique du point matériel s'obtient pour deux lois d'attraction : directement proportionnelle à la première puissance de la distance ou inversement au carré. Aucune autre loi d'attraction ne permettrait au point matériel de décrire une ellipse, ni même une courbe fermée (Bertrand).

qui les attire en raison inverse du carré de la distance, et proportionnellement à leur masse, sont entre eux comme les cubes des grands axes.

Soit M un de ces points. La durée T d'une révolution résulte du théorème des aires qui donne :

$$\int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \text{AT} = 2\,\pi a b.$$

Mais en vertu de la formule :

$$b = \frac{\text{A}}{\text{K}}\sqrt{a},$$

on a :

$$\text{T} = \frac{2\pi a^{\frac{3}{2}}}{\text{K}}.$$

En conservant des notations analogues, on trouve pour un point M_1 :

$$\text{T}_1 = \frac{2\pi a_1^{\frac{3}{2}}}{\text{K}}.$$

Or K est identique dans les deux égalités, puisqu'il se rapporte au même centre, donc :

$$\frac{\text{T}_1^2}{\text{T}^2} = \frac{a_1^3}{a^3}.$$

164. Position du point matériel en fonction du temps. — La relation $r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{A}$, semble tout indiquée pour résoudre le problème, parce qu'il suffit de remplacer r^2 par la valeur tirée de l'équation de l'ellipse, pour former une équation entre θ et t.

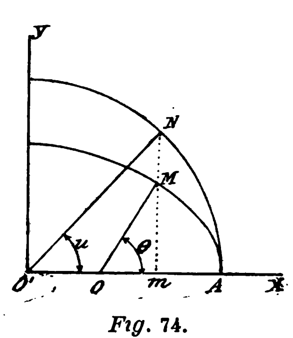


Fig. 74.

Pour éviter les difficultés d'intégration, nous suivrons une autre méthode, en prenant une variable nouvelle, définie comme suit :

Soient M la position du mobile à l'instant t, θ l'angle correspondant appelé *anomalie* vraie (*Fig.* 74). Sur le grand axe de la courbe traçons une circonférence et prolongeons l'ordonnée du point M, jusqu'à sa rencontre en N avec la circonférence. L'angle AO'N est dit

l'*anomalie excentrique* et sert de variable auxiliaire. Désignons-le par u.

On donne le nom d'*anomalie moyenne* à la vitesse angulaire du mobile fictif qui décrirait la circonférence d'un mouvement uniforme pendant le temps T mis par le mobile réel pour opérer une révolution complète. Elle a pour valeur $\frac{2\pi}{T}$ et nous la désignons par n.

Ces définitions admises, prenons pour origine des temps, l'époque du passage du mobile en A. L'équation des aires, intégrée de A en M, donne :

$$\int_0^\theta r^2 d\theta = At, \text{ ou: } 2 \text{ surf. AOM} = At.$$

Mais la surface AO'M peut être considérée comme la projection de la surface AO'N, située dans un plan qui fait avec celui de l'ellipse, un angle défini par la valeur $\frac{b}{a}$ de son cosinus, donc :

$$\text{surf. AO'M} = \text{surf. NO'A} \times \frac{b}{a} = \frac{1}{2} a^2 u \frac{b}{a} = \frac{1}{2} abu.$$

D'autre part :

$$\text{surf. AO'M} = \text{surf. AOM} + \text{surf. OMO'} \text{ (I).}$$

Or :

$$\text{surf. AOM} = \frac{At}{2};$$

la constante A se détermine par le principe des aires appliqué à une révolution complète et il vient :

$$\int_0^{2\pi} r^2 d\theta = AT, \quad A = \frac{\int_0^{2\pi} r^2 d\theta}{T} = \frac{2\pi}{T} ab = nab,$$

donc :

$$\text{surf. AOM} = \frac{nabt}{2}.$$

Enfin :

$$\text{surf. OMO'} = \frac{OO' \times Mm}{2} = \frac{aer \sin\theta}{2}.$$

Mais

$$\frac{Mm}{Nm} = \frac{b}{a} \text{ ou bien : } \frac{r\sin\theta}{a\sin u} = \frac{b}{a},$$

par suite :

$$r \sin \theta = b \sin u \quad \text{et} \quad \text{surf. OMO}' = \frac{bae \sin u}{2}.$$

En partant de ces résultats, l'équation (I) devient :

$$\text{(I)} \quad nt = u - e \sin u.$$

Il reste à évaluer r et θ en fonction de u. Nous tirons de la figure :

$$\text{(2)} \quad \text{O}m = r \cos \theta = a \cos u - ae.$$

De plus, l'équation polaire de l'ellipse : $r = \dfrac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$, nous donne :

$$r \cos \theta = \frac{a(1-e^2) - r}{e},$$

d'où l'égalité :

$$a \cos u - ae = \frac{a(1-e^2) - r}{e},$$

et enfin :

$$\text{(II)} \quad r = a(1 - e \cos u).$$

En ajoutant (2) et (II) puis en soustrayant celle-ci de la précédente on a :

$$r(1 + \cos \theta) = a(1 - e)(1 + \cos u),$$
$$r(1 - \cos \theta) = a(1 + e)(1 - \cos u);$$

en divisant ces relations membre à membre, il vient :

$$tg \frac{1}{2} \theta = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\, tg \frac{1}{2} u.$$

Le problème est donc complètement résolu, car pour chacune des valeurs de t, les autres variables u, r, θ sont déterminées.

165. Lois de Képler. — A la suite de nombreuses observations, Képler a trouvé les lois suivies par les planètes dans leurs mouvements autour du soleil supposé immobile. Si nous admettons que ces astres soient réduits à des points matériels, ces lois sont précisément celles du mouvement d'un point matériel attiré en raison inverse du carré de la distance, par un centre fixe. Elles sont formulées comme suit :

1° *Les planètes décrivent des ellipses dont le soleil est l'un des foyers.*

2° *Les rayons vecteurs des planètes par rapport au soleil, engendrent des aires planes qui varient proportionnellement au temps.*

3° *Les carrés des durées des révolutions des planètes autour du soleil, sont proportionnels aux cubes des grands axes des ellipses décrites.*

166. Newton s'est basé sur ces lois, pour établir le principe de la gravitation universelle. Il s'est posé le problème suivant : Un point matériel décrit une trajectoire elliptique ; rechercher la force centrale émanant d'un foyer O et capable de produire ce mouvement (*Fig.* 73).

Soient F la force inconnue et $r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$ l'équation polaire de l'ellipse rapportée au foyer et au grand axe. Substituons les équations déduites du théorème des aires et du théorème de la force vive aux équations du mouvement. L'intensité de la force étant seule demandée, nous partirons des équations suivantes :

$$(1)\ r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta},\quad (2)\ r^2\frac{d\theta}{dt} = A,\quad (3)\ \frac{d\,\frac{1}{2}mv^2}{dt} = -F\frac{dr}{dt}\ (144).$$

Nous obtiendrons F en fonction de r par l'élimination de v dans la troisième équation. Or :

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \text{ (n° 50)},$$

expression qui se transforme en fonction de l'équation (2) et devient :

$$v^2 = \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right]$$
$$= \frac{A^2}{r^4}\left[\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right];$$

l'équation (3) s'écrit donc :

$$\frac{1}{2}mA^2\,\frac{d\left[\frac{1}{r^4}\left\{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2\right\}\right]}{dt} = -F\frac{dr}{dt}.$$

Mais la relation (1) dérivée donne :

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{re\sin\theta}{1+e\cos\theta},$$

et en en tenant compte, on trouve facilement :

$$m \frac{A^2}{2} \frac{d \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{e^2 - 1}{(1 + e \cos \theta)^2} + \frac{2}{(1 + e \cos \theta)} \right\}}{dt} = - F \frac{dr}{dt},$$

ce que l'on transforme en partant de l'équation de l'ellipse :

$$1 + e \cos \theta = \frac{a (1 - e^2)}{r},$$

et il vient :

$$m A^2 \frac{d \frac{1}{2a^2 (e^2 - 1)}}{dt} + m A^2 \frac{d \frac{1}{ra (1 - e^2)}}{dt} = - F \frac{dr}{dt},$$

et par suite :

$$\frac{- mA^2}{a (1 - e^2)} \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} = - F \frac{dr}{dt} \quad \text{ou} \quad F = \frac{K^2}{r^2} m,$$

si nous posons : $K^2 = \dfrac{A^2}{a (1 - e^2)}$.

La force totale est donc en raison inverse du carré de la distance.

Prouvons maintenant, que par suite de la troisième loi de Képler, le coefficient K^2 conserve la même valeur pour tous les points matériels soumis à l'action du centre fixe. Soient M et M_1 deux de ces mobiles, pour lesquels nous conservons les notations précédentes, mais en affectant d'un indice celles qui se rapportent à M_1. Nous devons démontrer que :

$$\frac{A^2}{a (1 - e^2)} = \frac{A_1^2}{a_1 (1 - e_1^2)} \quad \text{ou} \quad \frac{A^2}{A_1^2} = \frac{a}{a_1} \frac{1 - e^2}{1 - e_1^2},$$

or des relations :

$$2 \pi ab = AT, \quad 2 \pi a_1 b_1 = A_1 T_1, \quad (163)$$

nous tirons :

$$\frac{A^2}{A_1^2} = \frac{a^2 b^2}{a_1^2 b_1^2} \frac{T_1^2}{T^2} = \frac{a_1 b^2}{a b_1^2} = \frac{a (1 - e^2)}{a_1 (1 - e_1^2)},$$

$$\text{car } b = a \sqrt{1 - e^2}, \quad b_1 = a_1 \sqrt{1 - e_1^2}.$$

On en conclut que la force centrale est directement proportionnelle à la masse attirée. Enfin le principe de l'égalité de l'action

et de la réaction, montre qu'il n'y a pas de distinction à faire entre la masse attirée et la masse attirante. Il s'ensuit que l'attraction se fait proportionnellement au produit des masses et en raison inverse du carré de la distance.

CHAPITRE XVII

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL SUR UNE SURFACE FIXE

167. Un point matériel soumis à des forces données est assujetti à rester sur une surface fixe, qui subit par ce fait une certaine action, mais exerce sur le mobile une réaction égale et contraire. L'intervention de cette force inconnue ou de ses deux composantes $\overline{\mathrm{N}}$ et $f\overline{\mathrm{N}}$ (127), permet de considérer le point matériel comme libre. Si donc X, Y, Z, sont les projections suivant les axes rectangulaires d'une force directement appliquée ; X', Y', Z' les composantes du frottement ; λ, μ, ν, les angles directeurs de $\overline{\mathrm{N}}$, lès équations du mouvement (128) s'écrivent :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X + X' + N\cos\lambda,$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y + Y' + N\cos\mu,$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z + Z' + N\cos\nu.$$

Or la réaction N est normale à la surface $\varphi(x, y, z) = 0$, donc :

$$\cos\lambda = \pm\Delta\frac{d\varphi}{dx}, \quad \cos\mu = \pm\Delta\frac{d\varphi}{dy}, \quad \cos\nu = \pm\Delta\frac{d\varphi}{dz},$$

expressions dans lesquelles :

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2}}.$$

D'autre part, le frottement de glissement, étant directement opposé à la vitesse (127), a pour cosinus directeurs :

$$-\frac{dx}{ds}, \quad -\frac{dy}{ds}, \quad -\frac{dz}{ds},$$

et ses projections sur les axes sont :

$$-fN\frac{dx}{ds}, \quad -fN\frac{dy}{ds}, \quad -fN\frac{dz}{ds};$$

les équations du mouvement deviennent donc :

$$1) \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X - fN\frac{dx}{ds} \pm N\Delta\frac{d\varphi}{dx},$$

$$2) \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y - fN\frac{dy}{ds} \pm N\Delta\frac{d\varphi}{dy},$$

$$3) \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z - fN\frac{dz}{ds} \pm N\Delta\frac{d\varphi}{dz};$$

nous y ajoutons l'équation de la surface :

$$4) \quad \varphi(x, y, z) = C.$$

Généralement le sens de la réaction est connu et le signe de $\pm N\Delta$ déterminé. C'est ce que nous admettrons, en supposant le cas le plus fréquent, d'un point matériel se mouvant sur une surface, qui n'offre de résistance qu'à la pénétration. La réaction a le sens indiqué sur la figure 60, et si l'on en tient compte dans les équations, on doit trouver pour N une valeur positive. Le contraire prouverait que la liaison ne fonctionne plus.

On conclut de ce qui précède, à la règle suivante : *Pour étudier le mouvement d'un point matériel sur une surface naturelle, on rend le point libre en faisant intervenir la réaction totale par ses deux composantes* N *et* fN. *On choisit trois axes rectangulaires de coordonnées et on forme un système composé des trois équations du mouvement et de l'équation de la surface. Les inconnues sont* x, y, z, N, *que l'on détermine en fonction du temps et des données initiales du problème.*

Il arrive que les théorèmes généraux donnent des relations plus avantageuses que les équations du mouvement, auxquelles elles seront alors substituées.

168. Cas particulier d'une surface sans frottement. — Les équations précédentes deviennent :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X \pm N\Delta\frac{d\varphi}{dx},$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y \pm N\Delta\frac{d\varphi}{dy},$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z \pm N\Delta\frac{d\varphi}{dz},$$

$$\varphi(x, y, z) = C.$$

Les inconnues x, y, z, N sont obtenues en fonction du temps et des circonstances initiales du mouvement. *L'élimination de* $\pm$ N *laisse trois équations qui servent au calcul des coordonnées de la position du mobile. Ce résultat obtenu, il suffit de reprendre l'une des équations du mouvement, pour obtenir la grandeur de* N *et le signe du terme qui le contient.*

Les théorèmes généraux conduisent parfois à des relations plus facilement intégrables, qui sont substituées aux équations du mouvement. Or l'intégrale de la force vive, si elle existe, est indépendante de N, et le théorème des aires, s'il est applicable, jouit de la même propriété. Alors les équations correspondantes forment avec celle de la surface, un système de trois équations indépendantes de N, qui détermine x, y, z, en fonction du temps.

169. Équilibre du point matériel sur une surface fixe. — Le point matériel rendu libre par la réaction, est en équilibre si celle-ci est égale et de sens opposé à la résultante des forces directement appliquées. Nous examinerons cette condition dans les deux hypothèses d'une surface avec ou sans frottement. Dans chaque cas, nous distinguerons deux problèmes, suivant que l'on donne la position d'équilibre ou qu'elle est inconnue.

Admettons le frottement et supposons la position d'équilibre donnée.

La réaction totale fait donc avec la normale à la surface un angle dont la limite supérieure est l'angle de frottement (127); dès lors l'équilibre du point dans la position donnée exige que la résultante des forces directement appliquées fasse avec la normale à la surface, un angle égal ou plus petit que l'angle de frottement. Cette condition est insuffisante si la réaction ne peut se développer que dans un sens, car la résultante en question, lui étant opposée, a un sens bien déterminé. Enfin il faut que la résultante soit moindre que la résistance offerte par la surface, ce que nous n'avons pas à examiner dans ce cours.

170. Même problème, mais la position d'équilibre est inconnue. — Nous partons des équations d'équilibre du point matériel, rendu libre par la réaction totale. Ce sont les équations du mouvement dans lesquelles 1° nous égalons à zéro $\frac{d^2x}{dt^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, $\frac{d^2z}{dt^2}$; 2° nous remplaçons $-\frac{dx}{ds}$, $-\frac{dy}{ds}$, $-\frac{dz}{ds}$, par les cosinus des

angles α, β, γ faits par la réaction tangentielle avec les axes; 3° nous substituons à f la tangente de l'angle ε fait par la réaction totale avec la normale à la surface (127). Il vient :

$$(1)\quad \Sigma X + N\,tg\,\varepsilon \cos\alpha \pm N\Delta \frac{d\varphi}{dx} = 0,$$

$$(2)\quad \Sigma Y + N\,tg\,\varepsilon \cos\beta \pm N\Delta \frac{d\varphi}{dy} = 0,$$

$$(3)\quad \Sigma Z + N\,tg\,\varepsilon \cos\gamma \pm N\Delta \frac{d\varphi}{dz} = 0,$$

$$(4)\quad \varphi(x, y, z) = C.$$

Nous avons de plus la relation entre les cosinus directeurs de la réaction tangentielle :

$$(5)\quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

et les équations qui expriment que la réaction normale est perpendiculaire à la réaction tangentielle et fait un angle 180° — ε avec la résultante des forces directement appliquées, savoir :

$$(6)\quad \cos\alpha \frac{d\varphi}{dx} + \cos\beta \frac{d\varphi}{dy} + \cos\gamma \frac{d\varphi}{dz} = 0,$$

$$(7)\quad \mp \Delta\left(\frac{d\varphi}{dx}\Sigma X + \frac{d\varphi}{dy}\Sigma Y + \frac{d\varphi}{dz}\Sigma Z\right) = \cos\varepsilon\sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2}.$$

Fréquemment le sens de la réaction est connu et le signe déterminé; c'est ce que nous admettrons ici. Les équations servent à calculer x, y, z, N, α, β, γ pour toute valeur de ε comprise entre zéro et l'angle de frottement; de là une suite de positions d'équilibre que l'on obtient par la règle suivante :

Le point matériel est rendu libre par la réaction totale de la surface; puis on forme les trois équations d'équilibre, l'équation de la surface, la relation entre les cosinus directeurs de la réaction tangentielle, et enfin les relations qui expriment que la réaction normale est perpendiculaire à la réaction tangentielle et fait un angle 180° — ε avec la résultante des forces directement appliquées. Les inconnues sont les coordonnées du point matériel, la réaction normale N *et les cosinus directeurs de la réaction tangentielle, à déterminer pour chaque valeur de ε.*

171. L'hypothèse $\varepsilon = 0$ se rapporte à la surface sans frottement. En supposant une résistance absolue à l'enlèvement et à la pénétration, la seule condition d'équilibre du point dans une position donnée, est d'avoir la résultante des forces directement appli-

quées, normale à la surface. Mais le sens de cette force serait imposé, si la réaction ne se développait que dans un sens.

172. Même problème, mais la surface est supposée sans frottement. — Nous partons des équations précédentes dans lesquelles $\varepsilon = 0$ et il vient :

$$(1)\quad \Sigma X \pm N\Delta \frac{d\varphi}{dx} = 0,$$

$$(2)\quad \Sigma Y \pm N\Delta \frac{d\varphi}{dy} = 0,$$

$$(3)\quad \Sigma Z \pm N\Delta \frac{d\varphi}{dz} = 0,$$

$$(4)\quad \varphi(x, y, z) = C.$$

Les équations (5) et (6) disparaissent ; l'équation (7) devient une identité, car en éliminant $\pm N\Delta$ entre (1), (2), (3), il reste :

$$(II)\quad \frac{\Sigma X}{\frac{d\varphi}{dx}} = \frac{\Sigma Y}{\frac{d\varphi}{dy}} = \frac{\Sigma Z}{\frac{d\varphi}{dz}}.$$

De là ce fait connu que la résultante des forces directement appliquées est normale à la surface. Les équations (II) forment avec (4) un système indépendant de N et qui détermine les coordonnées de la position cherchée. D'où la règle : *On calcule les coordonnées de la position d'équilibre au moyen des équations* (II) *et de l'équation de la surface. On déduit* N *des équations d'équilibre, dans l'une desquelles on remplace ensuite la réaction par sa valeur absolue, ce qui permet de déterminer le signe du terme en* Δ *et le sens correspondant, lequel doit s'accorder avec l'hypothèse faite sur la surface.*

173. Application. Mouvement d'un point matériel pesant sur un plan dépoli incliné d'un angle i sur l'horizon. — Prenons l'origine des coordonnées dans la position initiale du mobile, l'axe OY positif suivant la ligne de plus grande pente descendante, l'axe OX suivant une horizontale du plan et l'axe OZ perpendiculaire à cette surface. La force totale est résultante du poids et de la réaction totale, qui est inclinée en sens inverse du mouvement de l'angle de frottement α (127). Les équations du n° 167 deviennent :

$$(1)\quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -f\mathrm{N}\frac{dx}{ds},$$

$$(2)\quad m\frac{d^2y}{dt^2} = mg\sin i - f\mathrm{N}\frac{dy}{ds},$$

$$(3)\quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \mathrm{N} - mg\cos i = 0,$$

$$(4)\quad \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1.$$

De l'équation (3) on tire :

$$\mathrm{N} = mg\cos i,$$

et par suite :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -fg\cos i\,\frac{dx}{ds},\quad \frac{d^2y}{dt^2} = g\left(\sin i - f\cos i\,\frac{dy}{ds}\right).$$

Nous n'examinerons que le cas particulier d'une vitesse initiale $\overline{V_0}$ dirigée suivant la ligne de plus grande pente. Le frottement et la composante mg sin i du poids ont la même direction en sens contraires et le mouvement est rectiligne. Ses équations sont :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0,\quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{g}{\cos\alpha}\sin(i-\alpha).$$

Elles donnent :

$$\frac{dx}{dt} = 0,\quad x = 0,$$

$$\frac{dy}{dt} = \mathrm{V}_0 + g\frac{\sin(i-\alpha)}{\cos\alpha}t,\quad y = \mathrm{V}_0t + g\frac{\sin(i-\alpha)}{\cos\alpha}\frac{t^2}{2}.$$

Ce sont les lois d'un mouvement rectiligne uniformément varié, que nous examinerons dans les trois hypothèses $\mathrm{V}_0 \gtreqless 0$.

1° $\mathrm{V}_0 > 0$. Le mouvement est accéléré, retardé ou uniforme selon que $i \gtreqless \alpha$. Si $i < \alpha$, le mobile s'arrête après le temps t_1, déterminé par l'équation :

$$\frac{dy}{dt} = 0 = \mathrm{V}_0 + gt_1\frac{\sin(i-\alpha)}{\cos\alpha}.$$

2° $\mathrm{V}_0 = 0$. Le mouvement est accéléré pour toute inclinaison plus grande que l'angle de frottement, mais pour toute inclinaison plus petite le point reste immobile, car l'angle de la réaction totale avec la normale au plan, est inférieur à l'angle de frottement (127).

3° $V_0 < 0$. La vitesse initiale est dirigée vers le haut, fN change de signe et il vient en prenant V_0 en valeur absolue :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{g}{\cos\alpha}\sin(i+\alpha), \quad \frac{dy}{dt} = -V_0 + \frac{gt}{\cos\alpha}\sin(i+\alpha).$$

Le mouvement est donc uniformément retardé dans le sens ascendant; le mobile s'arrête après un temps t_1, déterminé par la relation :

$$-V_0 + \frac{gt_1}{\cos\alpha}\sin(i+\alpha) = 0,$$

la position correspondante est donnée par la formule :

$$y_1 = -V_0t_1 + \frac{gt_1^2}{2\cos\alpha}\sin(i+\alpha).$$

A partir de cette époque nous sommes dans les conditions discutées au 2°.

174. Même problème, mais en supprimant le frottement. — Dans cette hypothèse la réaction tangentielle est nulle et les équations précédentes deviennent :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = mg\sin i, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = 0 = N - mg\cos i.$$

De celle-ci, on tire N; les deux autres définissent le mouvement du mobile soumis à l'action d'une force constante $mg \sin i$. Il est connu (159) et la trajectoire est la parabole :

$$y = -x\,tg\,\alpha + \frac{g\sin i}{2V_0^2\cos^2\alpha}x^2.$$

Si la vitesse initiale est dirigée suivant la ligne de plus grande pente, le mouvement est rectiligne et uniformément varié. Les équations sont :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = 0, \quad x = 0.$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = g\sin i, \quad \frac{dy}{dt} = V_0 + gt\sin i, \quad y = V_0t + \frac{gt^2}{2}\sin i.$$

175. Mouvement d'un point pesant sur une surface sphérique sans frottement. — Nous concevons aussi ce mouvement en imaginant le point matériel relié par un fil ou une tige inextensible et sans masse à un centre fixe. La tension du fil remplace la

réaction de la surface et le système prend le nom de *pendule sphérique.*

Rapportons sa position à trois axes rectangulaires dont l'origine est le centre de la sphère ; l'axe OZ est vertical et positif vers le bas, et le plan XOZ est mené par la position initiale du mobile (*Fig.* 75). Soit a la longueur du fil ou le rayon de la sphère. La force totale est résultante du poids et de la réaction ; on a, par suite, les équations du mouvement :

$$(1)\quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -N\frac{x}{a},\quad (2)\quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -N\frac{y}{a},$$

$$(3)\quad m\frac{d^2z}{dt^2} = -N\frac{z}{a} + mg;$$

il faut y joindre l'équation de la surface :

$$(4)\quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Ces quatre équations serviraient en principe à déterminer x, y, z, N en fonction du temps; mais il est plus simple de recourir aux équations données par le théorème de la force vive et par le théorème des aires, car elles sont indépendantes de la réaction.

Le premier théorème donne une intégrale de la force vive et les surfaces de niveau sont horizontales ; le second est applicable à l'axe OZ, rencontré constamment par la force totale. De là les deux équations :

$$(5)\quad V^2 = V_0^2 + 2g(z - z_0),\quad (6)\quad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = A.$$

Les équations (4), (5), (6), indépendantes de N, déterminent x, y, z, en fonction du temps, mais il est avantageux de les traduire en coordonnées polaires, car la position du mobile sur la sphère, dépend des seuls angles ψ et θ. Par convention ψ croît positivement de OX vers OY, et θ de OZ vers le plan XOY. Nous considérons le mouvement comme résultant de deux mouvements simultanés correspondants aux variations de ces angles, savoir :

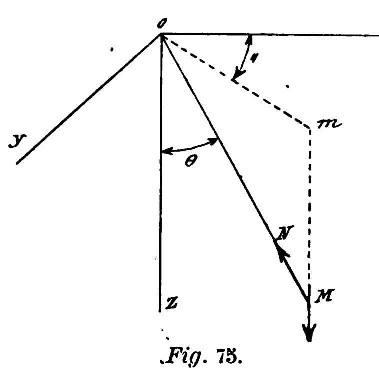


Fig. 75.

1° un mouvement du point dans le plan méridien OZM ;
2° un mouvement d'entraînement du plan OZM autour de OZ.

Tous deux sont des rotations et leurs vitesses angulaires sont $\frac{d\theta}{dt}, \frac{d\psi}{dt}$. Le point possède donc les vitesses simultanées $a\frac{d\theta}{dt}$, $a \sin\theta \frac{d\psi}{dt}$, perpendiculaires entre elles, et la vitesse absolue est donnée par la relation :

$$V^2 = a^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + a^2 \sin^2\theta \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2.$$

L'intégrale de la force vive s'écrit par conséquent :

$$(5') \quad a^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + a^2 \sin^2\theta \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = V_o^2 + 2ga (\cos\theta - \cos\theta_o).$$

Si nous désignons par r le rayon vecteur de la projection m du mobile sur le plan XOY, on a :

$$(6') \quad r^2 \frac{d\psi}{dt} = A.$$

La constante A s'obtient en fonction des circonstances initiales du mouvement représentées par r_o, θ_o, $\psi_o = 0$ puisque la position initiale est dans le plan XOZ, V_o et par l'angle β que fait la vitesse initiale avec l'axe OY. Il vient :

$$r_o . r_o \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_o = A.$$

Or $r_o = a \sin\theta_o$, et si nous décomposons V_o suivant une parallèle à OY et suivant l'intersection du plan de ces deux droites avec le plan XOZ, la première composante $V_o \cos\beta$ se projette en véritable grandeur sur le plan des XY (*Fig.* 76). Elle représente la vitesse de circulation $r_o \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_o$ à l'époque initiale, et on a par conséquent :

$$r_o \left(\frac{d\psi}{dt}\right)_o = V_o \cos\beta,$$

Fig. 76.

d'où :

$$A = r_o V_o \cos\beta = a \sin\theta_o V_o \cos\beta.$$

L'étude du mouvement dans le plan vertical mobile se fait en éliminant ψ entre (5') et (6'). On trouve :

$$a^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{A^2}{a^2 \sin^2 \theta} = V_o^2 + 2ga\,(\cos\theta - \cos\theta_o),$$

ou bien :

$$a^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = V_o^2 + 2ga\,(\cos\theta - \cos\theta_o) - \frac{A^2}{a^2 \sin^2 \theta}.$$

Le premier membre étant essentiellement positif, il doit en être de même du second et les valeurs limites de θ résultent de l'équation :

$$V_o^2 + 2ga\,(\cos\theta - \cos\theta_o) - \frac{A^2}{a^2 \sin^2 \theta} = 0,$$
$$a^2\,(1 - \cos^2\theta)\,[V_o^2 + 2ga\,(\cos\theta - \cos\theta_o)] - A^2 = 0.$$

Représentons, pour simplifier, le premier membre par $\varphi(\theta)$. L'équation $\varphi(\theta) = 0$ est du troisième degré en θ et nous séparons les racines qui conviennent au problème en faisant varier $\cos\theta$ de -1 à $+1$, ce qui donne le tableau suivant :

$\cos\theta = -1$	$\varphi(\theta) = -A^2$
$\cos\theta = \cos\theta_o$	$\varphi(\theta) = V_o^2 a^2 \sin^2\theta_o \sin^2\beta$
$\cos\theta = +1$	$\varphi(\theta) = -A^2$

De là deux racines que nous appelons θ_1 et θ_2. La première est comprise entre 180° et θ_o, la seconde entre θ_o et 0°. Ce sont les limites de l'oscillation dans le plan méridien, car $\frac{d\theta}{dt}$ s'annule en même temps que $\varphi(\theta)$. L'angle θ croît jusqu'à la valeur maximum θ_1, puis décroît jusqu'à la valeur minimum θ_2. Dans ces positions particulières, la vitesse s'annule, change de signe et de sens, par conséquent l'amplitude d'une oscillation est $\theta_1 - \theta_2$. Sa durée est donnée par $\int_{\theta_2}^{\theta_1} \frac{a \sin\theta}{\sqrt{\varphi(\theta)}}\,d\theta$ ou par $\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{a \sin\theta}{-\sqrt{\varphi(\theta)}}\,d\theta$ d'après le sens du mouvement ou le signe de $\frac{d\theta}{dt}$. Ces intégrales étant égales, le mouvement du pendule dans le plan méridien mobile se compose d'oscillations égales et de même durée.

Rotation du plan méridien mobile. La relation

$$a^2 \sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} = A,$$

prouve que le signe de $\frac{d\psi}{dt}$ et le sens du mouvement sont constants; comme cette vitesse angulaire n'est fonction que de θ, elle reprend périodiquement les mêmes valeurs.

176. Calcul de N. — La réaction se calcule en ajoutant membre à membre les équations du mouvement, multipliées respectivement par x, y, z, ce qui donne :

$$m\left(x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}\right)=mgz-Na.$$

Mais en dérivant deux fois l'équation de la sphère, on trouve :

$$x\frac{d^2x}{dt^2}+y\frac{d^2y}{dt^2}+z\frac{d^2z}{dt^2}=-V^2,$$

et par suite :

$$N=\frac{m}{a}(V^2+gz).$$

Il s'ensuit que la réaction est dirigée vers l'intérieur de la sphère, aussi longtemps que $V^2+gz>0$, mais si cette expression change de signe, la réaction change de sens. Ce phénomène se produit dans la position du mobile pour laquelle $V^2+gz=0$; il est incompatible avec l'existence d'un pendule, formé d'un point matériel pesant et d'un fil. Dans cette hypothèse, le plan horizontal $z=\frac{-V^2}{g}$, limite les oscillations du point sur la sphère.

177. Du pendule conique. — Le pendule est dit conique quand le point matériel pesant décrit un parallèle horizontal de la sphère, en sorte que la surface engendrée par le fil, est un cône de révolution autour de la verticale du point de suspension. Les valeurs limites θ_1 et θ_2 sont égales à θ_0 et dans ce cas l'équation $\varphi(\theta)=0$, ayant deux racines égales, nous donne :

$$\varphi(\theta_0)=0,\quad \varphi'(\theta_0)=0;$$

de là les deux relations :

$$(7)\ r_0^2V_0^2\sin^2\beta=0,\quad (8)\ V_0^2\cos\theta_0-ga\sin^2\theta_0=0.$$

De celle-ci on tire :

$$V_0=\sqrt{\frac{a\sin^2\theta_0\, g}{\cos\theta_0}}=\sqrt{\frac{a^2\sin^2\theta_0\, g}{a\cos\theta_0}}=r_0\sqrt{\frac{g}{z_0}}.$$

L'équation (7) prouve que l'un des facteurs r_o, V_o, β, doit s'annuler; mais l'équation (8) montre que V_o et r_o sont différents de zéro; par suite $\beta = 0$, la vitesse initiale est horizontale et sa valeur est déterminée par la formule (8).

Enfin l'équation $r_o^2 \frac{d\psi}{dt} = A$, démontre l'uniformité de la rotation du pendule sur le parallèle et donne :

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{V_o}{r_o} = \sqrt{\frac{g}{z_o}}.$$

Donc la vitesse angulaire dépend uniquement de la distance du parallèle au point de suspension, à laquelle on donne le nom de *longueur du pendule.* Ce qui précède s'applique à toute surface de révolution à axe vertical, sur laquelle le point pesant décrit un parallèle ; z_o est alors la sous-normale de la courbe méridienne et devient constante dans le cas de la parabole. Il en résulte que le pendule décrit, avec une vitesse angulaire constante, un parallèle quelconque du paraboloïde de révolution à axe vertical. Le régulateur Farcot utilise cette propriété.

Le mouvement du pendule étant uniforme, la durée T d'une révolution est donnée par la formule :

$$T = \frac{2\pi}{\frac{d\psi}{dt}} = 2\pi \sqrt{\frac{z}{g}}.$$

Remarque. Si la vitesse initiale est nulle, ou dirigée suivant la tangente à la circonférence de grand cercle située dans le plan vertical :

$$A = 0, \quad \frac{d\psi}{dt} = 0, \quad \psi = c^{te}$$

et le mouvement se fait dans le plan méridien vertical défini par la position initiale du pendule. Ce cas particulier sera étudié au n° 184.

178. **Problème.** — *On donne un point matériel* M *placé sur une surface sphérique sans frottement. Il est soumis à l'action de* n *forces dirigées vers* n *points donnés et proportionnelles aux distances de ces points à* M. — *On demande la position d'équilibre de celui-ci.*

Imaginons trois axes rectangulaires ayant le centre de la sphère

pour origine. Soient x, y, z, les coordonnées de la position demandée ; a, b, c, celles d'un point donné A ; mKl^2 l'action qu'il produit sur le point M (*Fig.* 77).

Les équations du n° 168 deviennent :

$$\text{(I)}\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad \text{(II)}\ \frac{\Sigma X}{x} = \frac{\Sigma Y}{y} = \frac{\Sigma Z}{z}.$$

Mais la force développée par A sur M est égale à mK^2l ; ses cosinus directeurs sont : $\frac{a-x}{l}, \frac{b-y}{l}, \frac{c-z}{l}$ et on a :

$$X = mK^2 (a - x),$$
$$Y = mK^2 (b - y),$$
$$Z = mK^2 (c - z),$$

d'où :

$$\Sigma X = mK^2 \Sigma a - nmK^2 x,$$
$$\Sigma Y = mK^2 \Sigma b - nmK^2 y,$$
$$\Sigma Z = mK^2 \Sigma c - nmK^2 z,$$

et les équations II deviennent :

$$\frac{\Sigma a}{x} = \frac{\Sigma b}{y} = \frac{\Sigma c}{z};$$

combinées avec l'équation de la sphère, elles donnent :

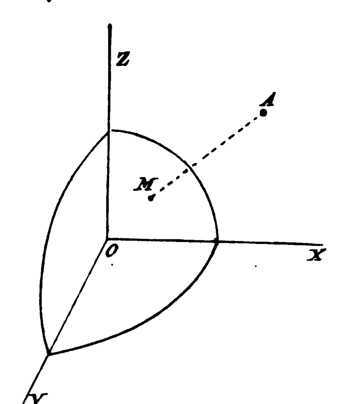


Fig. 77.

$$x = \frac{R \Sigma a}{\pm \sqrt{(\Sigma a)^2 + (\Sigma b)^2 + (\Sigma c)^2}}, \quad y = \frac{R \Sigma b}{\pm \sqrt{(\Sigma a)^2 + (\Sigma b)^2 + (\Sigma c)^2}},$$

$$z = \frac{R \Sigma c}{\pm \sqrt{(\Sigma a)^2 + (\Sigma b)^2 + (\Sigma c)^2}}.$$

Le double signe indique que pour une surface réagissant dans les deux sens, il y aurait deux positions d'équilibre, déterminées par les points de percée avec la sphère, de la droite qui joint le centre au point dont les coordonnées sont $\frac{\Sigma a}{n}, \frac{\Sigma b}{n}, \frac{\Sigma c}{n}$.

CHAPITRE XVIII

MOUVEMENT DU POINT MATÉRIEL SUR UNE COURBE FIXE

179. Le point matériel assujetti à rester sur une courbe fixe, est rendu libre par la réaction qui est oblique ou normale,

suivant qu'il y a frottement ou qu'on en fait abstraction. Dans le premier cas, la force totale est résultante des forces directement appliquées, de la réaction normale $\overline{N}$, et du frottement $f\overline{N}$. Soient X, Y, Z, les composantes d'une force directement appliquée suivant les axes rectangulaires ; X', Y', Z' les composantes du frottement ; λ, μ, ν les angles directeurs de $\overline{N}$; les équations du mouvement sont :

$$\Sigma X + N\cos\lambda + X' = m\frac{d^2x}{dt^2},$$
$$\Sigma Y + N\cos\mu + Y' = m\frac{d^2y}{dt^2},$$
$$\Sigma Z + N\cos\nu + Z' = m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Or, le frottement de glissement, dirigé en sens inverse de la vitesse, a pour cosinus directeurs $-\frac{dx}{ds}$, $-\frac{dy}{ds}$, $-\frac{dz}{ds}$ et par conséquent il vient :

$$(1)\quad \Sigma X + N\cos\lambda - fN\frac{dx}{ds} = m\frac{d^2x}{dt^2},$$
$$(2)\quad \Sigma Y + N\cos\mu - fN\frac{dy}{ds} = m\frac{d^2y}{dt^2},$$
$$(3)\quad \Sigma Z + N\cos\nu - fN\frac{dz}{ds} = m\frac{d^2z}{dt^2},$$

la réaction $\overline{N}$ étant normale à la courbe, on a en plus :

$$(4)\quad \cos\lambda\frac{dx}{ds} + \cos\mu\frac{dy}{ds} + \cos\nu\frac{dz}{ds} = 0;$$

entre les cosinus existe d'ailleurs la relation connue :

$$(5)\quad \cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1,$$

et les deux équations de la courbe sont :

$$(6)\quad \varphi_1(x, y, z) = C_1, \qquad 7)\quad \varphi_2(x. y, z) = C_2.$$

Ces sept équations suffisent au calcul de x, y, z, λ, μ, ν, N en fonction du temps et des circonstances initiales du mouvement, mais généralement les intégrations seront très compliquées.

Donc : *Pour étudier le mouvement d'un point matériel sur une courbe fixe et avec frottement, on rend le point libre en faisant intervenir la réaction normale et le frottement de glissement. On choisit les axes rectangulaires des coordonnées, par rapport auxquels on forme un système de sept équations, composé des*

trois équations du mouvement, des deux équations de la courbe, de la relation exprimant que la réaction normale est perpendiculaire à la vitesse, et de la relation entre les cosinus directeurs de la réaction. Les inconnues sont les coordonnées x, y, z, du point, la réaction normale N, *et ses angles directeurs* λ, μ, ν.

180. **Courbe sans frottement.** — Les équations deviennent :

$$(1)\quad m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma X + N\cos\lambda,$$

$$(2)\quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \Sigma Y + N\cos\mu,$$

$$(3)\quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \Sigma Z + N\cos\nu,$$

$$(4)\quad \cos\lambda\frac{dx}{ds} + \cos\mu\frac{dy}{ds} + \cos\nu\frac{dz}{ds} = 0,$$

$$(5)\quad \cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1,$$

$$(6)\quad f_1(x, y, z) = C_1, \qquad (7)\quad f_2(x, y, z) = C_2.$$

Il suffit d'une équation nouvelle, indépendante de $\overline{N}$, pour former avec les équations de la courbe un système donnant directement $x, y. z$. Cette relation est dans certains cas donnée par l'intégrale de la force vive :

$$mv^2 = 2\varphi(x, y, z) + C \text{ ou } v = \frac{ds}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\varphi(x, y, z) + C}.$$

Or, les équations de la courbe, résolues par rapport à x et à y, s'écrivent :

$$x = \psi(z), \quad y = \pi(z);$$

par conséquent :

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 [1 + \psi'^2(z) + \pi'^2(z)],$$

d'où en intégrant, on trouve :

$$t = \pm\int\sqrt{\frac{1 + \psi'^2(z) + \pi'^2(z)}{\frac{2}{m}\varphi\left(\psi(z), \pi(z), z\right) + C}}\,dz.$$

181. **Cas particulier de l'équilibre.** — *Supposons un frottement.* La réaction est inclinée sur le plan normal d'un angle qui a pour limite l'angle de frottement (127); dès lors, l'équilibre n'est possible, que si la résultante des forces directement appliquées fait avec l'intersection du plan normal à la courbe et du plan défini

par la tangente et cette résultante, un angle égal ou plus petit que l'angle de frottement. Cette condition est suffisante si la position d'équilibre est donnée; si elle est inconnue, le problème est plus compliqué. Reprenons les équations du mouvement (179) après avoir annulé l'accélération et remplacé f par la tangente de l'angle ε fait par la réaction avec le plan normal à la courbe. Les cosinus directeurs du frottement sont :

$$\pm \frac{dx}{ds}, \quad \pm \frac{dy}{ds}, \quad \pm \frac{dz}{ds},$$

car nous ne connaissons pas *a priori* le sens qu'il possède, mais on peut le déterminer, puisqu'il est opposé au mouvement qui tend à se produire, Nous avons donc :

$$(1) \quad \Sigma X + N \cos \lambda \pm N \, tg \, \varepsilon \, \frac{dx}{ds} = 0,$$

$$(2) \quad \Sigma Y + N \cos \mu \pm N \, tg \, \varepsilon \, \frac{dy}{ds} = 0,$$

$$(3) \quad \Sigma Z + N \cos \nu \pm N \, tg \, \varepsilon \, \frac{dz}{ds} = 0,$$

$$(4) \quad \cos \lambda \frac{dx}{ds} + \cos \mu \frac{dy}{ds} + \cos \nu \frac{dz}{ds} = 0,$$

$$(5) \quad \cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1,$$

$$(6) \quad f_1(x, y, z) = C_1, \qquad (7) \quad f_2(x, y, z) = C_2.$$

Abstraction faite de toute difficulté d'analyse, ce système donne $x, y, z, \lambda, \mu, \nu$, N, pour chaque valeur particulière de ε. En faisant varier cet angle de 0 à α (127), on obtient la suite des positions d'équilibre.

D'où la règle : *Pour trouver les positions d'équilibre d'un point matériel sur une courbe fixe et avec frottement, on rend le point libre en lui appliquant la réaction totale. On choisit les axes rectangulaires des coordonnées et on forme sept équations, savoir : les trois équations d'équilibre, les deux équations de la courbe, la relation exprimant que la réaction normale est perpendiculaire à la courbe et la relation entre les cosinus directeurs de la réaction normale. Les inconnues sont les coordonnées x, y, z de la position du point, la réaction* N, *et ses angles directeurs λ, μ, ν. Elles se déterminent pour les valeurs de ε comprises entre zéro et l'angle de frottement.*

182. **Courbe sans frottement.** — Dans cette hypothèse $\varepsilon = 0$ et la résultante des forces directement appliquées doit être normale à la courbe. Les équations du numéro précédent deviennent :

$$(1) \quad \Sigma X + N \cos \lambda = 0,$$
$$(2) \quad \Sigma Y + N \cos \mu = 0,$$
$$(3) \quad \Sigma Z + N \cos \nu = 0,$$
$$(4) \quad \cos \lambda \frac{dx}{ds} + \cos \mu \frac{dy}{ds} + \cos \nu \frac{dz}{ds} = 0,$$
$$(5) \quad \cos^2 \lambda + \cos^2 \mu + \cos^2 \nu = 1,$$
$$(6) \quad f_1(x, y, z) = C_1, \qquad (7) \quad f_2(x, y, z) = C_2.$$

Or, $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, vérifient les équations de la courbe dérivées, c'est-à-dire :

$$\frac{df_1}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{df_1}{dy}\frac{dy}{ds} + \frac{df_1}{dz}\frac{dz}{ds} = 0,$$
$$\frac{df_2}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{df_2}{dy}\frac{dy}{ds} + \frac{df_2}{dz}\frac{dz}{ds} = 0.$$

L'élimination de $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ entre ces deux équations et l'équation (4), ramène la condition d'équilibre à la forme suivante :

$$\begin{vmatrix} \Sigma X & \Sigma Y & \Sigma Z \\ \frac{df_1}{dx} & \frac{df_1}{dy} & \frac{df_1}{dz} \\ \frac{df_2}{dx} & \frac{df_2}{dy} & \frac{df_2}{dz} \end{vmatrix} = 0.$$

Elle constitue avec les équations de la courbe, un système de trois équations indépendantes de N, déterminant directement x, y, z, c'est-à-dire la position du mobile.

183. Théorème. — *La pression normale exercée par un point matériel parcourant une courbe fixe est résultante de la composante normale des forces directement appliquées et de la force centrifuge* (133) (*Fig.* 78).

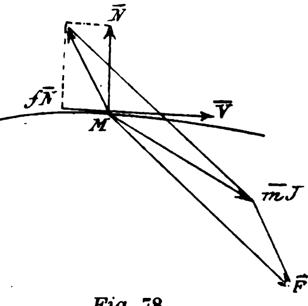


Fig. 78.

Nous devons rechercher la pression normale du point sur la courbe et par suite la réaction $\overline{N}$ égale et directement opposée. La force totale est résultante de la réaction totale et de la force directement appliquée $\overline{F}$: mais elle est aussi résultante de la force tangentielle et de la force centripète (n° 128); donc en ne prenant que les composantes

normales : la force centripète est résultante de la réaction normale $\overline{N}$ et de la composante normale des forces directement appliquées $(\overline{F \sin \widehat{FV}})$.

Autrement dit, la réaction normale est résultante de la composante normale des forces directement appliquées prises en sens inverse et de la force centripète. Ce que l'on exprime par la relation :

$$\overline{F \sin \widehat{FV}} + \overline{N} = \frac{\overline{mV^2}}{\rho}.$$

De celle-ci on conclut que $(-\overline{N})$, pression normale du point sur la courbe, est résultante de la composante normale des forces directement appliquées et de la force centripète changée de sens, c'est-à-dire de la force centrifuge.

184. Du pendule simple. — *On donne un point matériel pesant, qui se meut sur une circonférence sans frottement et fixe, située dans un plan vertical. On demande son mouvement.* Celui-ci peut aussi se concevoir, en imaginant le mobile relié par une tige ou un fil inextensible et sans masse à un point fixe ; sa vitesse initiale est nulle ou dirigée suivant la tangente à la circonférence de grand cercle situé dans le plan vertical (177). Ce système matériel s'appelle le *pendule simple*. Nous le rapportons à deux axes rectangulaires des coordonnées dont l'axe des x est un diamètre horizontal et l'axe des y un diamètre vertical, positif dans le sens de g (*Fig.* 79). Soit a la longueur du fil, les équations du n° 180 deviennent :

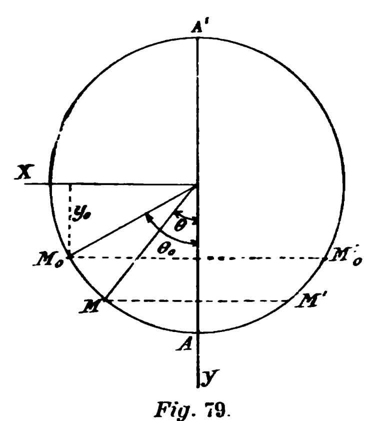


Fig. 79.

$$(1) \quad m \frac{d^2x}{dt^2} = -N \frac{x}{a},$$

$$(2) \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -N \frac{y}{a} + mg,$$

$$(3) \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

Les équations (4), (5), (6) du n° 182 n'ont pas été rappelées, car elles interviennent déjà dans les équations (1), (2), (3) par suite de la forme donnée aux composantes de la réaction.

Mais dans ce cas-ci, il y a intégrale de la force vive :

$$v^2 = v_0^2 + 2g\,(y - y_0) \quad (150)$$

et cette équation, combinée avec (3), forme un système que nous substituons aux équations générales.

Les propriétés principales du mouvement s'établissent dès lors très simplement, en partant de l'existence de surfaces de niveau horizontales. On en déduit immédiatement l'égalité des grandeurs de la vitesse dans les positions M et M' symétriques par rapport à la verticale. Le pendule abandonné en M_0 sans vitesse initiale, atteint donc la position symétrique M'_0. Les demi-oscillations sont égales; elles ont aussi même durée, parce que la loi qui détermine la vitesse sur l'arc AM_0 est nécessairement la même pour l'arc AM'_0, en vertu de ce que nous venons de dire.

La vitesse passe par un maximum dans la position A pour laquelle :

$$v = \sqrt{2g\,(a - y_0)}.$$

Enfin, le mobile reprenant la même vitesse en valeur absolue, chaque fois qu'il repasse par la même position, on en conclut l'identité des oscillations complètes. Pour en rechercher la durée, prenons la position M_0 pour origine des arcs et appliquons l'intégrale de la force vive, depuis M_0 jusqu'en M; il vient :

$$v^2 = 2g\,(y - y_0), \quad v = \pm\sqrt{2g\,(y - y_0)},$$

mais avec les notations indiquées :

$$y = a\cos\theta, \quad y_0 = a\cos\theta_0, \quad s = a\,(\theta_0 - \theta),$$
$$v = \frac{ds}{dt} = -\,a\,\frac{d\theta}{dt}\,;$$

par conséquent, l'intégrale de la force vive s'écrit encore :

$$\text{(I)} \quad a\,\frac{d\theta}{dt} = \pm\sqrt{2g\,(\cos\theta - \cos\theta_0)\,a}.$$

Le signe — correspond au mouvement dans le sens M_0MA pour lequel θ et t varient en sens opposés; le signe + au mouvement en sens contraire.

Intégrons cette équation de M_0 en A, et soit T la durée d'une demi-oscillation complète; nous obtenons :

$$\frac{T}{2} = \int_{\theta_0}^{0} \frac{-a d\theta}{\sqrt{2ga(\cos\theta - \cos\theta_0)}}.$$

Cette intégrale ne peut s'obtenir en termes finis; mais si les angles θ et θ_0 sont assez petits pour que l'on puisse remplacer leurs cosinus par $1 - \frac{\theta^2}{2}$ et $1 - \frac{\theta_0^2}{2}$, il vient :

$$T = -2\int_{\theta_0}^{0} \sqrt{\frac{a}{g}} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta_0^2 - \theta^2}} = 2\sqrt{\frac{a}{g}} \left(\text{arc cos } \frac{\theta}{\theta_0}\right)_{\theta_0}^{0} = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}.$$

Les oscillations sont donc indépendantes de l'angle θ et de même durée. De là cette propriété importante utilisée en horlogerie : *Les très petites oscillations du pendule simple sont isochrones et indépendantes de l'amplitude.* En pratique, on utilise le pendule composé dont la théorie se ramène à celle du pendule simple.

Remarque. L'intégrale (I), developpée suivant la méthode des fonctions elliptiques, donne :

$$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\theta_0}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4 \frac{\theta_0}{2} \dots \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n}\right)^2 \sin^{2n} \frac{\theta_0}{2} + \dots \right\}$$

185. Réaction. — La réaction $\overline{N}$ se calcule en multipliant les équations (1) et (2) par x et y, puis en les ajoutant membre à membre. En opérant comme pour le pendule sphérique (176), on trouve :

$$N = \frac{m}{a}(gy + v^2).$$

186. Problème. — *On donne un pendule constitué par un point matériel pesant et un fil, dans la position initiale* OM_0. *On demande la vitesse initiale qu'il faut lui imprimer pour qu'il fasse un tour complet* (Fig. 79).

La tension ne peut donc changer de sens, et dans toutes les positions il faut que : $gy + v^2 \geqq 0$.

Le minimum de cette expression ayant lieu au point A′, pour lequel la vitesse est v', nous devons avoir :

$$-ag + v'^2 \geqq 0, \quad v'^2 \geqq ag.$$

Admettons que $v'^2 = ag$; le théorème de la force vive appliqué de M_o en A', donne :

$$ag = v_o^2 - 2g(a + y_o) \text{ ou } v_o^2 = 3ag + 2g\,y_o.$$

Il faut donc que $v_o \geqq \sqrt{3ag + 2gy_o}$.

Soient $mg = 18^{\text{kil.}}$, $a = 6^{\text{m}}$, $y_o = \frac{a}{2}$, $g = 10^{\text{m}}$; on trouve $v_o \geqq 15^{\text{m}},5$.

Dans la position A la tension est maximum et vaut $\frac{m}{a}(ga + v_1^2)$. La vitesse v_1 en ce point résulte du théorème de la force vive appliqué de M_o en A, et on a :

$$v_1^2 = v_o^2 + 2g(a - y_o) = 240 + 2.10\,(6 - 3) = 300^{\text{m}},$$

et par suite :

$$N = \frac{18^{\text{k}}}{6.10}(10.6 + 300) = 108 \text{ kilogrammes.}$$

Telle est la résistance que doit supporter le fil pour qu'il ne se brise pas.

187. *On demande la position d'équilibre d'un point pesant sur la circonférence dont les équations :*

$$(1)\ x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad (2)\ ax + cz = 0,$$

sont rapportées au système OXYZ *dans lequel* OZ *est vertical et positif dans le sens de g.*

Les inconnues x, y, z se déterminent par les équations (1), (2) et le déterminant du n° 182, qui devient :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & mg \\ 2x & 2y & 2z \\ a & 0 & c \end{vmatrix} = 0,$$

d'où l'on déduit :

$$y = 0, \quad x = \frac{cR}{\pm\sqrt{a^2 + c^2}}, \quad z = \frac{aR}{\mp\sqrt{a^2 + c^2}}.$$

Il en résulte deux positions d'équilibre, situées aux points d'intersection de la circonférence avec le plan vertical XOZ.

CHAPITRE XIX

MOUVEMENT RELATIF DU POINT MATÉRIEL

188. Nous avons admis jusqu'ici la fixité du système de comparaison auquel est rapportée la position du point matériel. C'est donc au mouvement absolu que conviennent les principes fondamentaux de la mécanique, alors que tous les mouvements observés sont relatifs. Proposons-nous de les étudier en établissant dans cette hypothèse, les relations qui existent entre les forces. La solution du problème est de la plus haute importance, en raison de son application à tous les mouvements de la nature. Si l'observation expérimentale de ces phénomènes concorde avec les déductions de la théorie, nous conclurons à la vérité des principes fondamentaux, et de la mécanique tout entière.

Soient $O_1X_1Y_1Z_1$ le système fixe, OXYZ le système mobile, M le point matériel, $\overline{J_a}$, $\overline{J_r}$, $\overline{J_e}$, $\overline{J_{cp}}$, les accélérations absolue, relative, d'entraînement et complémentaire. Le théorème de Coriolis donne l'égalité géométrique :

$$\overline{J_a} = \overline{J_r} + \overline{J_e} + \overline{J_{cp}}, \quad (80)$$

d'où :

$$\overline{J_r} = \overline{J_a} - \overline{J_e} - \overline{J_{cp}}.$$

Nous passerons aux forces en multipliant les deux membres par *m*, ce qui donne :

$$(1) \quad \overline{mJ_r} = \overline{mJ_a} - \overline{mJ_e} - \overline{mJ_{cp}}.$$

Par convention $\overline{mJ_r}$ est appelée *force totale dans le mouvement relatif* et les forces fictives représentées par $(-\overline{mJ_e})$ $(-\overline{mJ_{cp}})$ sont dites *force d'inertie d'entraînement* et *force centrifuge composée*. En vertu de ces définitions, l'équation (1) conduit à la règle suivante : *Le mouvement relatif s'étudie comme le mouvement absolu, à la condition de considérer le point matériel comme soumis à la résultante géométrique de la force totale absolue, de la force d'inertie d'entraînement et de la force centrifuge composée.*

Les deux forces fictives sont dirigées suivant les accélérations d'entraînement et complémentaire, auxquelles elles sont directe-

ment opposées. Les projections de la force centrifuge composée sur les axes mobiles résultent des formules du n° 81. Ce sont :

$$\left.\begin{aligned} -(mJ_{cp})_x &= -2m\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right), \\ -(mJ_{cp})_y &= -2m\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right), \\ -(mJ_{cp})_z &= -2m\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right). \end{aligned}\right\} \text{II.}$$

Cette force a pour valeur absolue $2m\omega V_r \sin\alpha$ (80).

Dans les applications, on substitue souvent à l'équation (I) les équations de projection sur les axes mobiles :

$$\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= mJ_{ax} - mJ_{ex} - 2m\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right), \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= mJ_{ay} - mJ_{ey} - 2m\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right), \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= mJ_{az} - mJ_{ez} - 2m\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right). \end{aligned}$$

Elles constituent les équations fondamentales du mouvement relatif. Pour les appliquer convenablement, on se rappellera ce qui est dit au n° 81. Enfin on remarquera que les forces fictives s'annulent en même temps que les *accélérations correspondantes.*

189. **Mouvement relatif d'un point matériel à la surface de la terre.** — On rapporte instinctivement les mouvements observés sur la terre à cette planète et on les étudie généralement comme s'ils étaient absolus, c'est-à-dire sans faire intervenir les forces fictives. Cette manière de faire doit être justifiée, car la terre n'est pas immobile. Elle possède dans le système solaire un mouvement qui résulte d'une rotation uniforme autour de la ligne des pôles, et d'une translation telle que le centre de gravité décrit l'écliptique, conformément aux lois de Kepler. Le système solaire lui-même est animé d'un mouvement de translation par rapport aux étoiles dites fixes, et la mobilité de tous ces systèmes nous amène à rechercher les forces fictives qu'il faut faire intervenir, lorsque nous considérons comme système immobile celui des étoiles fixes, au lieu d'attribuer cette propriété à la terre.

Imaginons à cet effet un système de comparaison intermédiaire (S_1) comprenant la ligne des pôles et possédant le mouvement de translation sur l'écliptique. Dans ce système le mouvement

de la terre est la rotation uniforme autour de la ligne des pôles, et l'accélération $\overline{J}_1$ du mobile est résultante de l'accélération relative à la terre $\overline{J}_r$ et des accélérations complémentaire et d'entraînement $(\overline{J}_{cp}, \overline{J}_e)$ qui sont la conséquence du mouvement de notre planète. Nous les déterminerons ultérieurement. Quoi qu'il en soit, nous avons :

$$\overline{J}_1 = \overline{J}_r + \overline{J}_{cp} + \overline{J}_e.$$

Si maintenant nous rapportons le mouvement du mobile au système solaire (S_2), l'accélération relative à ce système supposé fixe, sera résultante des accélérations précédentes et d'une accélération d'entraînement nouvelle $\overline{J}_{1e}$, qui n'est d'ailleurs que l'accélération du centre de gravité de la terre, définie par les lois de Kepler ; quant à l'accélération complémentaire $\overline{J}_{1cp}$, elle est nulle, parce que le mouvement d'entraînement de S_1 par rapport à S_2, est la translation sur l'écliptique (81); donc :

$$\overline{J}_2 = \overline{J}_1 + \overline{J}_{1e} = \overline{J}_r + \overline{J}_{cp} + \overline{J}_e + \overline{J}_{1e},$$

ou bien :

$$\overline{mJ}_2 = \overline{mJ}_r + \overline{mJ}_{cp} + \overline{mJ}_e + \overline{mJ}_{1e},$$

nous aurions enfin à considérer le mouvement du système solaire relativement aux étoiles dites fixes, ainsi que les forces qu'elles produisent sur le point matériel ; mais nous n'en tiendrons pas compte, parce qu'ils sont inappréciables.

Nous remplacerons donc $\overline{J}_2$ par $\overline{J}_a$ et nous aurons :

$$\overline{mJ}_a = \overline{mJ}_r + \overline{mJ}_{cp} + \overline{mJ}_e + \overline{mJ}_{1e},$$

mais dans cette force totale la partie $\overline{mJ}_{1e}$ est due aux actions du soleil, de la lune et des planètes, qui communiquent à tous les points de la terre la même accélération $\overline{J}_{1e}$ qu'au centre de gravité, par suite du rapport extrêmement faible de la longueur du rayon terrestre à la distance aux astres précités. Si donc on ne considère pas leur action sur le point, on devra faire abstraction du mouvement de translation sur l'écliptique et on aura :

$$\overline{mJ}_a = \overline{mJ}_r + \overline{mJ}_{cp} + \overline{mJ}_e,$$

ou bien :

$$\overline{mJ}_r = \overline{mJ}_a - \overline{mJ}_{cp} - \overline{mJ}_e.$$

On en conclut que le *mouvement d'un point matériel à la surface de la terre s'étudie comme si elle tournait autour de la ligne des pôles devenue fixe, en restant soustraite à toute action extérieure.*

190. Équilibre relatif du point matériel à la surface de la terre. — Le point matériel en équilibre occupe la position O que nous prendrons pour origine des axes rectangulaires positifs OX, OY, OZ, dirigés suivant les tangentes au méridien vers le sud, au parallèle vers l'est, et suivant le rayon terrestre. Soient a le rayon de la terre supposée sphérique, ω la vitesse angulaire autour de la ligne des pôles. Le point étant au repos relatif, V_r est nul ainsi que la force centrifuge composée et la seule force fictive est la réaction d'inertie d'entraînement due à la rotation uniforme autour de la ligne des pôles NS, puisque la terre tourne de l'ouest vers l'est (*Fig.* 80). La force d'inertie d'entraînement se réduit à la force centrifuge et le point est en équilibre relatif sous l'action de trois forces : 1° l'attraction du globe $\overline{mg'}$ dirigée suivant OZ ; 2° la réaction $\overline{R}$ de la terre en O ; 3° la force centrifuge qui est $\overline{m\omega^2 r}$, si l'on pose AO $= r$.

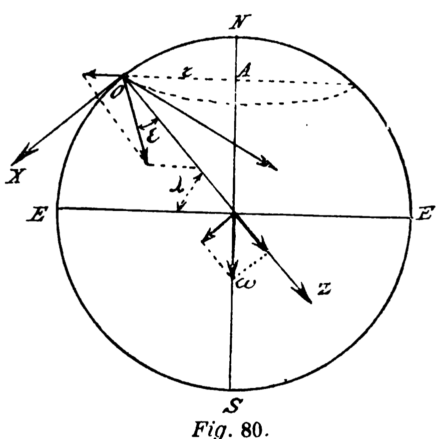


Fig. 80.

La force $\overline{R}$ est donc égale et directement opposée à la résultante de mg' et de $\overline{m\omega^2 r}$, que l'on appelle le poids (mg) du point. Elle est dirigée suivant la *verticale* et fait avec le rayon terrestre OZ un angle ε, fonction de la latitude λ. En effet, les équations $\Sigma X = 0$ et $\Sigma Z = 0$ deviennent ici :

$$R \sin \varepsilon = m\omega^2 r \sin \lambda = m\omega^2 a \sin \lambda \cos \lambda.$$

$$R \cos \varepsilon = mg' - m\omega^2 a \cos^2 \lambda,$$

d'où : $$R \text{ ou } mg = m\sqrt{\omega^4 a^2 \cos^2 \lambda + g'^2 - 2\omega^2 a g' \cos^2 \lambda} ;$$

il en résulte :

$$\sin \varepsilon = \frac{\omega^2 a \sin \lambda \cos \lambda}{\sqrt{\omega^4 a^2 \cos^2 \lambda + g'^2 - 2\omega^2 a g' \cos^2 \lambda}},$$

$$g = \sqrt{\omega^4 a^2 \cos^2 \lambda + g'^2 - 2\omega^2 a g' \cos^2 \lambda}.$$

La pesanteur est donc fonction de λ. Elle est minimum à l'équateur, parce que dans cette position particulière la force centrifuge est maximum et directement opposée à $\overline{mg'}$. Or les valeurs correspondantes de g et de $\omega^2 a$ sont $9^m781031$ et 0^m03398; de plus, $g' - g = \omega^2 a$, donc $g' = 9^m81501$ et par conséquent :

$$\frac{\omega^2 a}{g'} = 0{,}00346 = \left(\frac{1}{17}\right)^2 \text{ approximativement.}$$

Une rotation dix-sept fois plus rapide autour de la ligne des pôles, rendrait donc la force centrifuge égale à l'attraction terrestre et annulerait le poids des corps à l'équateur.

En résumé, le poids du point matériel fait intervenir la force d'inertie d'entraînement, et la force centrifuge composée est nulle dans toute question d'équilibre relatif, d'où la règle : *L'équilibre relatif à la terre d'un point matériel, s'étudie comme un équilibre absolu, à condition de remplacer l'attraction terrestre par la pesanteur dirigée suivant la verticale.*

191. **Mouvement d'un point matériel à la surface de la terre.** — Conservons les axes du numéro précédent et prenons l'origine dans la position initiale du mobile. Dans ce système de coordonnées, les composantes de la rotation autour de la ligne des pôles et les projections de la force centrifuge composée sont :

$$p = \omega \cos \lambda, \quad q = 0, \quad r = \omega \sin \lambda,$$

$$2m\omega \sin \lambda \frac{dy}{dt}, \; 2m\omega \left(\frac{dz}{dt} \cos \lambda - \frac{dx}{dt} \sin \lambda\right), \; -2m\omega \cos \lambda \frac{dy}{dt}.$$

Si donc X, Y, Z, sont les composantes de la force totale absolue, abstraction faite de l'attraction terrestre, et mg le poids du point, les équations du mouvement relatif à la surface de la terre deviennent :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = X + mg \sin \varepsilon + 2m\omega \sin \lambda \frac{dy}{dt},$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = Y + 2m\omega \left(\frac{dz}{dt} \cos \lambda - \frac{dx}{dt} \sin \lambda\right),$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = Z + mg \cos \varepsilon - 2m\omega \cos \lambda \frac{dy}{dt}.$$

Bien qu'en réalité λ et g soient variables, on les suppose constantes dans les problèmes où le déplacement du point n'est pas très grand. On néglige ε et quand la vitesse est faible, on néglige aussi la force centrifuge composée, parce qu'elle renferme le facteur

$$\omega = \frac{2\pi}{86164\,(1)} = 0{,}000073.$$

D'où la règle : *Le mouvement relatif d'un point matériel à la surface de la terre s'étudie comme un mouvement absolu, aussi longtemps que la vitesse et la durée sont faibles, à condition de remplacer l'attraction terrestre par la pesanteur.*

Dans ce cas, il revient pratiquement au même de considérer comme système immobile celui des étoiles dites fixes ou la terre elle-même.

Examinons maintenant deux cas où la différence entre les deux hypothèses n'est pas négligeable.

192. Mouvement d'un point pesant abandonné sans vitesse initiale. — Nous ne tenons pas compte de la résistance de l'air et nous supposons ε nul, ainsi que λ et g constantes. S'il en est ainsi. les composantes $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, de la vitesse relative sont très faibles et nous négligeons dans une première approximation les termes qui les renferment en même temps que ω. La pesanteur est donc la seule force agissant sur le point et les équations du n° 191 deviennent :

$$(1)\quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad (2)\quad \frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega\cos\lambda\,\frac{dz}{dt}, \qquad (3)\quad \frac{d^2z}{dt^2} = g.$$

Or pour $t = 0$, $\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = 0$, $z_0 = 0$, d'où $\frac{dz}{dt} = gt$, $z = \frac{gt^2}{2}$.

Remplaçons $\frac{dz}{dt}$ par sa valeur dans l'équation (2), il vient :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega\cos\lambda\,gt, \quad \frac{dy}{dt} = \omega\cos\lambda gt^2, \quad y = \frac{1}{3}\,\omega\cos\lambda gt^3,$$

sans constante, car pour $t = 0$, on a $y = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$.

La première équation donne ensuite $\frac{dx}{dt} = 0$, $x = 0$.

(1) Jour sidéral.

Nous obtenons une expression plus exacte de la loi du mouvement, en substituant à $\frac{dy}{dt}$, sa valeur dans l'équation (1) du n° 191, et il vient :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\omega^2 \sin\lambda \cos\lambda\, gt^2,$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2}{3}\omega^2 \sin\lambda \cos\lambda\, gt^3, \quad x = \frac{1}{6}\omega^2 \sin\lambda \cos\lambda\, gt^4.$$

Des valeurs de x et de y on conclut que le point en tombant ne décrit pas la verticale, mais subit dans notre hémisphère une déviation très faible vers le sud et une déviation plus sensible vers l'est, que nous mettons sous la forme :

$$y = \frac{1}{3} g\omega \cos\lambda \left(\sqrt{\frac{2z}{g}}\right)^3 = \frac{2^{\frac{3}{2}}\omega \cos\lambda\, z^{\frac{3}{2}}}{3g^{\frac{1}{2}}}.$$

Cette formule a été vérifiée par une expérience faite dans un puits de mine à Freyberg, par M. Reich. On avait : $\lambda = 51°$, $z = 158^{m}5$, y calculé $= 0{,}0276$, y constaté $= 0^{m}0283$. La concordance de ces résultats, supposés obtenus d'une manière irréprochable, est assez grande pour qu'on puisse en conclure que les lois de la mécanique se vérifient mieux par rapport au système des étoiles fixes que par rapport à la terre; par conséquent, les étoiles fixes se rapprochent plus que la terre du système immobile, dans le sens que l'on doit donner à cette expression. Il en résulte que c'est la terre, et non le système des étoiles fixes, qui est animée d'une rotation absolue. L'expérience que nous venons de citer a toutefois l'inconvénient de tirer ses conclusions de déviations très faibles; en outre on a négligé la résistance de l'air et dans les expériences on a pris la moyenne entre des nombres très discordants. Heureusement l'application des mêmes principes au pendule de Foucault, nous fournit une confirmation éclatante de ces conclusions.

193. **Remarque.** — Les déviations x, y sont produites par la force centrifuge composée, normale à la vitesse relative et de sens opposé à celui vers lequel se déplacerait une aiguille placée suivant cette vitesse, et entraînée par une rotation de même sens que la rotation terrestre autour d'une parallèle à la ligne des pôles menée par le point mobile (80).

Cette force fictive agit sur tout mobile situé dans notre hémisphère pour le faire dévier à droite de sa vitesse ; elle est nulle au pôle et maximum à l'équateur.

Ainsi s'expliquent différents phénomènes, tels que la déviation du gulf-stream vers l'est, la corrosion de la rive droite des fleuves qui coulent dans l'hémisphère nord et qui peut être marquée, si la vitesse est grande et le volume d'eau considérable (Volga). Dans l'hémisphère austral se produisent des phénomènes analogues, mais la force déviatrice agit vers la gauche de la vitesse.

Cette théorie rend compte aussi d'une déviation appréciable des projectiles dans le tir aux grandes distances, qui est due à la rotation de la terre.

194. **Pendule de Foucault.** — Le mouvement du pendule simple à la surface de la terre, est un mouvement relatif à celle-ci. Ses équations s'établissent en prenant l'origine au point de suspension et en conservant les axes indiqués au n° 190. Si nous adoptons les notations du pendule sphérique, nous devrons faire dans les équations du n° 191, $X = -N\frac{x}{a}$, $Y = -N\frac{y}{a}$, $Z = -N\frac{z}{a}$; faisons $\varepsilon = 0$ et il viendra :

$$(1) \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -N\frac{x}{a} + 2m\omega\sin\lambda\frac{dy}{dt},$$

$$(2) \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = -N\frac{y}{a} + 2m\omega\left(\frac{dz}{dt}\cos\lambda - \frac{dx}{dt}\sin\lambda\right),$$

$$(3) \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = -N\frac{z}{a} - 2m\omega\cos\lambda\frac{dy}{dt} + mg,$$

$$(4) \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Abstraction faite de toute difficulté d'analyse, x, y, z, N seront déterminées en fonction du temps, au moyen des équations précédentes. Elles ne peuvent s'intégrer et nous ne considérerons que le cas d'une vitesse et d'un écart initiaux assez faibles pour que l'on puisse négliger les rapports $\left(\frac{x}{a}\right)^2$, $\left(\frac{y}{a}\right)^2$ dans toute la suite du mouvement. Dans ces conditions :

$$\frac{z}{a} = \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} = 1, \quad \frac{dz}{dt} = 0, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

Les résultats précédents conduisent à supposer le mouvement dans un plan horizontal et sa projection sur le plan OXY est seule

intéressante à étudier. Simplifions encore les équations en supprimant les termes qui renferment simultanément $\frac{dz}{dt}$, $\frac{x}{a}$, ou $\frac{y}{a}$ ainsi que ω, On tire alors de la troisième équation :

$$N = mg - 2m\omega \cos\lambda \frac{dy}{dt},$$

d'où :

$$N\frac{x}{a} = mg\frac{x}{a} - 2m\omega\cos\lambda\frac{dy}{dt}\frac{x}{a} = mg\frac{x}{a}, \quad N\frac{y}{a} = mg\frac{y}{a}.$$

Portons ensuite ces valeurs dans les deux premières équations et posons pour abréger $K = \omega \sin\lambda$, il vient :

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2K\frac{dy}{dt} + g\frac{x}{l} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} + 2K\frac{dx}{dt} + \frac{gy}{l} = 0.$$

Ces équations ont pour intégrales exactes :

$$x = \rho_0 \cos ht \cos(\psi_0 - Kt) - \frac{\rho_0}{h} K \sin ht \sin(\psi_0 - Kt),$$

$$y = \rho_0 \cos ht \sin(\psi_0 - Kt) + \frac{\rho_0}{h} K \sin ht \cos(\psi_0 - Kt),$$

expressions dans lesquelles ρ_0 et ψ_0 sont des constantes, connues par suite des données initiales, et $h = \sqrt{\frac{a}{g} + K^2}$.

Posons enfin :

$$\alpha = \psi_0 - Kt, \quad x' = \rho_0 \cos ht, \quad y' = \frac{\rho_0}{h} K \sin ht,$$

il viendra :

$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \quad y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Ces équations montrent que x', y' sont les coordonnées de la projection M′ du point sur le plan horizontal, par rapport a un système d'axes rectangulaires OX′Y′Z qui fait avec les axes OXYZ, un angle α compté de OX vers OY (*Fig.* 81). Mais l'angle $\alpha = \psi_0 - Kt$, donc le système OX′Y′ tourne autour de la verticale OZ avec la vitesse angulaire $-K = -\omega\sin\lambda$, c'est-à-dire dans le sens E. S. O. N. De plus à l'instant initial $t = 0$, $\alpha = \psi_0$ et par suite la position initiale de OX′ coïncide avec la projection contemporaine du pendule, sur le plan horizontal. Les valeurs correspondantes de x' et de y' seront :

$$x'_0 = \rho_0, \quad y'_0 = 0.$$

Le mouvement de la projection M′ par rapport au second système de comparaison OX′Y′ se détermine au moyen des valeurs de x' et de y'. Elles prouvent qu'il est périodique et la durée d'une période résulte de la formule :

$$T = \frac{2\pi}{h} = 2\pi\sqrt{\frac{a}{g}},$$

en négligeant K^2 qui est de l'ordre de ω^2.

Enfin l'élimination de t entre x' et y' donne l'équation de la trajectoire. Elle s'obtient facilement en partant de la relation :

$\sin^2 Kt + \cos^2 Kt = 1.$

Il vient ainsi :

$$\left(\frac{x'}{\rho_0}\right)^2 + \left(\frac{hy'}{K\rho_0}\right)^2 = 1.$$

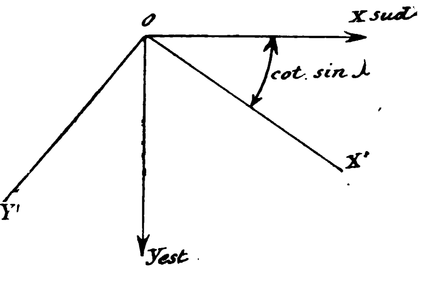


Fig. 81.

C'est une ellipse rapportée à ses axes. Ils ont pour longueurs $2\rho_0$ et $2\rho_0 \frac{K}{h}$ ou bien encore $2x'_0$ et $2x'_0\,\omega \sin\lambda \sqrt{\frac{a}{g}}$. Le second axe est donc très petit relativement au premier puisqu'ils sont dans le rapport $\omega \sin\lambda \sqrt{\frac{a}{g}}$. On en conclut que *dans le mouvement apparent du pendule libre à la surface de la terre, la projection horizontale du point pesant décrit une ellipse très allongée, dont le grand axe* OX′ *tourne autour de la verticale du point de suspension avec la vitesse angulaire constante* $\omega \sin\lambda$ *dans le sens* E.-S. O.-N.

Foucault a vérifié cette conclusion par une expérience célèbre faite au Panthéon de Paris. Un pendule de 67 mètres de longueur était maintenu écarté de la verticale par un fil combustible qui le reliait à un point fixe. Le système étant au repos, on brûlait le fil le pendule se mettait en mouvement et paraissait osciller dans un plan animé d'une rotation uniforme autour de la verticale.

Or dans cette expérience :

$$\lambda = 48^0\,50', \quad a = 67^m, \quad x'_0 = \rho_0 = 3^m.$$

On en déduit par le calcul :

$$2x'_0\,\omega \sin\lambda \sqrt{\frac{a}{g}} = 0{,}00086,$$

c'est-à-dire que le petit axe étant inférieur à un millimètre, le pendule doit paraître osciller dans le plan vertical ZOX', comme le montre l'observation. Celle-ci fait voir de plus que ce plan d'oscillation apparent tourne autour de la verticale dans le sens E.-S. O.-N. Enfin la durée de sa rotation complète mesurée expérimentalement est sensiblement égale à la durée d'une révolution calculée en supposant la rotation théorique $\omega \sin \lambda$. Elle est donc égale à $\frac{2\pi}{\omega \sin \lambda}$ soit $31^{h}\cdot 47'$. Ainsi donc l'expérience confirme entièrement la théorie.

Cette révolution complète du plan d'oscillation apparent ne devrait pas avoir lieu si la terre constituait un système immobile. Les conclusions de cette expérience sont donc les mêmes que celles de l'expérience du n° 192, mais avec une différence plus caractérisée entre les faits qui devaient se manifester dans les deux hypothèses.

LIVRE IV

MÉCANIQUE DES SYSTÈMES MATÉRIELS

CHAPITRE XX

§ 1. *Des systèmes matériels*

195. *On dit que des points matériels forment système, lorsque leurs mouvements doivent être considérés simultanément par suite des actions réciproques qu'ils produisent l'un sur l'autre, et que l'on appelle attractions ou répulsions suivant qu'elles tendent à les rapprocher où à les éloigner.* Ils sont reliés par des liaisons matérielles qui font partie du système ou lui sont extérieures ; nous citerons comme exemple de celles-ci une surface fixe sur laquelle se déplace un système mobile. En pratique, les liaisons matérielles se ramènent à l'un des types suivants ou à leurs combinaisons :

1° un point fixe ;

2° des collections de points formant courbes ou surfaces solides et sur lesquelles doivent se mouvoir des points du système ;

3° une tige rigide, considérée comme indéformable et qui réunit deux points ;

4° un fil que nous admettrons parfaitement flexible et inextensible et qui est tendu entre deux points, soit en ligne droite, soit sur la surface d'un appui.

Pour représenter analytiquement les liaisons, supposons un système de n points matériels M_1, M_2... M_n et désignons leurs coordonnées par rapport aux axes rectangulaires au moyen des lettres $x_1, y_1, z_1, \ldots\ldots x_n, y_n, z_n$. Chaque liaison impose au mouvement du point lié une condition qui se traduit par une ou plusieurs équations. Ainsi nous exprimons la fixité du point M en écrivant que ses coordonnées x, y, z, sont constamment égales aux coordonnées a, b, c de la position invariable qu'il occupe. S'il doit rester sur une courbe ou sur une surface, ses coordonnées satisfont aux équations correspondantes.

Enfin la liaison des deux points M_1 et M_2, par une tige rigide indéformable ou par un fil de longueur l tendu en ligne droite a pour équation : $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l^2$.

Ces diverses relations supposent les liaisons indépendantes du temps, chose admise le plus souvent, bien que l'on puisse donner des exemples où cela n'existe pas, tel un point matériel assujetti à demeurer sur une sphère métallique portée à haute température. En se refroidissant, elle se contracte et la liaison est une fonction du temps, dont l'équation se ramène à la forme générale :

$$L(x_1, y_1 \ldots\ x_n, y_n, z_n, t) = 0.$$

196. Les systèmes matériels se rangent en deux catégories, d'après le nombre d'équations de liaison : les systèmes à *liaisons complètes* et les systèmes à *liaisons incomplètes. Les premiers sont ceux dans lesquels* 3n — 1 *équations de liaison indépendantes du temps, relient les* 3n *coordonnées des points, de telle façon qu'on puisse les exprimer toutes, en fonction de l'une d'elles.* Nous aurons alors :

$$y = \varphi(x), \quad z = \psi(x), \quad x_1 = \pi_1(x), \quad y_1 = \varphi_1(x), \quad z_1 = \psi_1(x), \ldots$$

De ces équations on tire les trajectoires nécessairement décrites par les points et une seule relation de la forme $x = f(t)$ suffit pour déterminer le mouvement du système.

Pour fixer les idées, considérons un solide possédant un axe fixe. Il existe $3n - 1$ équations entre les $3n$ coordonnées des points, savoir : six équations exprimant la fixité des appuis M_1 et M_2 ; deux équations traduisant l'invariabilité des distances d'un point M_3 aux points fixes M_1 et M_2 ; $3(n - 3)$ équations analogues résultant de l'invariabilité des distances entre les $(n - 3)$ points restants et les points M_1, M_2, M_3. Le système est donc à liaisons complètes, et les points, situés en dehors de l'axe, décrivent des circonférences d'après une loi donnée par le mouvement d'un point quelconque d'un corps (62).

Les machines fournissent de nombreux exemples de systèmes matériels à liaisons complètes, sur lesquels nous aurons l'occasion de revenir.

Par opposition à la définition précédente, *le système est dit à liaisons incomplètes, quand le nombre d'équations est inférieur à* $3n - 1$.

197. **Des forces agissant sur un système matériel.** — Une liaison modifie le mouvement que prendrait le point qui la subit, si elle n'existait pas. A ce point de vue, elle peut être remplacée par la force qui produirait sur le point la même action, et à laquelle on donne le nom de *force de liaison.*

Indépendamment des forces de cette nature, nous trouvons encore, dans le système, des forces directement appliquées à certains points particuliers et des forces moléculaires. De là trois catégories :

1° Les forces *directement appliquées*, le plus souvent données et agissant sur des points déterminés. — 2° Les forces *moléculaires* développées l'un sur l'autre, par les points suffisamment rapprochés. Elles sont réciproques en vertu du troisième principe (126). — 3° Les forces de *liaison* déjà définies. Elles résultent de la constitution matérielle des liaisons dont les points engendrent des forces réciproques et produisent une action, inconnue d'ailleurs, sur le point du système qui les subit. Cette action prend le nom de *force de liaison.*

En partant d'autres considérations nous distinguerons :

1° les forces *extérieures*, comprenant les forces directement appliquées et les forces de liaison extérieures ;

2° les forces *intérieures*, dues aux actions réciproques des points du système et qui se composent des forces moléculaires et des forces de liaison intérieures.

198. **Vitesse et puissance virtuelles.** — *Nous appelons mouvement virtuel d'un point matériel, le mouvement fictif et généralement arbitraire que nous lui supposons. Il est indépendant des forces auxquelles le point pourrait être soumis et dont l'action se manifeste par le mouvement réel.*

Le mouvement virtuel se représente par une relation géométrique de la forme $\bar{l} = f(\bar{t})$ entre le vecteur qui détermine la position du mobile et une variable indépendante t, qui pourrait être le temps. La dérivée de cette fonction par rapport à t, est dite la *vitesse virtuelle* et on lui attribue la notation δ, pour la distinguer de la vitesse réelle, à laquelle on réserve la notation d.

En vertu de nos conventions (38), la vitesse virtuelle s'obtient en menant par la position du point, prise pour origine, une droite équipollente à $\frac{\overline{\delta l}}{\delta t}$. Elle est arbitraire, si la fonction dont elle dérive est elle-même arbitraire.

Nous donnons au produit géométrique de la force par la vitesse virtuelle de son point d'application, le nom de ***puissance virtuelle*** de la force. Tout ce qui a été dit des puissances réelles au numéro 140 s'applique aux puissances virtuelles.

Au moyen de cette notation nouvelle, on peut comprendre dans un seul énoncé les trois équations du mouvement d'un point matériel rendu libre (128). Imaginons en effet une virtuelle quelconque, et soient $\frac{\delta x}{dt}$, $\frac{\delta y}{dt}$, $\frac{\delta z}{dt}$, ses composantes tout à fait arbitraires, suivant les axes rectangulaires de coordonnées. Multiplions la première équation par $\frac{\delta x}{dt}$, la seconde par $\frac{\delta y}{dt}$, la troisième par $\frac{\delta z}{dt}$ et ajoutons-les membre à membre. Il vient :

$$(1)\quad m\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\delta x}{\delta t} + m\frac{d^2y}{dt^2}\frac{\delta y}{\delta t} + m\frac{d^2z}{dt^2}\frac{\delta z}{\delta t} = X_t\frac{\delta x}{\delta t} + Y_t\frac{\delta y}{\delta t} + Z_t\frac{\delta z}{\delta t}.$$

Cette relation représente les trois équations précédentes, car elle n'existe que si $m\frac{d^2x}{dt^2} = X_t$, $m\frac{d^2y}{dt^2} = Y_t$, $m\frac{d^2z}{dt^2} = Z_t$, puisque $\frac{\delta x}{\delta t}$, $\frac{\delta y}{\delta t}$, $\frac{\delta z}{\delta t}$ sont absolument arbitraires.

Lorsqu'il y a équilibre, il vient :

$$X_t = 0,\quad Y_t = 0,\quad Z_t = 0,\ (131)$$

ou bien :

$$(2)\quad X_t\frac{\delta x}{\delta t} + Y_t\frac{\delta y}{\delta t} + Z_t\frac{\delta z}{\delta t} = 0.$$

Cette dernière équation, équivalente aux trois autres, exprime qu'***un point matériel rendu libre, est en équilibre sous l'action de toutes les forces auxquelles il est soumis, quand la somme de leurs puissances virtuelles est nulle, quelle que soit la vitesse virtuelle du point.***

§ 2. *Problème général du mouvement des systèmes*

199. Le problème général de la dynamique d'un système de points matériels est le suivant : ***On donne les forces directement appliquées au système matériel, ainsi que les positions et les vitesses des points qui le composent à un instant donné, c'est-à-dire son état initial. On demande son mouvement.***

Reprenons le système des n points matériels $M_1, M_2, \ldots M_n$. Les forces qui leur sont directement appliquées sont $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \cdots \overline{F}_n$ et elles ont les projections $X_1, Y_1, Z_1, \ldots X_n, Y_n, Z_n$ sur les axes rectangulaires des coordonnées. Nous devons rechercher les positions des points à chaque instant, ce qui revient à déterminer les n coordonnées géométriques ou bien les $3n$ coordonnées analytiques $x_1, y_1, z_1 \ldots$ supposées fonctions continues du temps et qui sont les inconnues du problème. Dans ce but, rendons libres les points du système, en faisant intervenir les forces moléculaires et les forces de liaison. Nous aurons pour chacun d'eux, les forces totales $\overline{F}_{1t}, \overline{F}_{2t} \cdots \overline{F}_{nt}$ et par conséquent les trois équations connues :

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = X_{1t}, \ldots m_n \frac{d^2x_n}{dt^2} = X_{nt},$$
$$m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} = Y_{1t}, \ldots m_n \frac{d^2y_n}{dt^2} = Y_{nt},$$
$$m_1 \frac{d^2z_1}{dt^2} = Z_{1t}. \ldots m_n \frac{d^2z_n}{dt^2} = Z_{nt}.$$

Mais il vient d'être démontré que pour tout point du système rendu libre, les équations du mouvement se remplacent par la relation :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} \frac{\delta x}{\delta t} + m \frac{d^2y}{dt^2} \frac{\delta y}{\delta t} + m \frac{d^2z}{dt^2} \frac{\delta z}{\delta t} = X_t \frac{\delta x}{\delta t} + Y_t \frac{\delta y}{\delta t} + Z_t \frac{\delta z}{\delta t},$$

dans laquelle la vitesse virtuelle est complètement arbitraire. En vertu de cette propriété, les $3n$ équations précédentes s'écrivent sous la forme abrégée :

$$\text{(I)} \quad \Sigma \left(m \frac{d^2x}{dt^2} \frac{\delta x}{\delta t} + m \frac{d^2y}{dt^2} \frac{\delta y}{\delta t} + m \frac{d^2z}{dt^2} \frac{\delta z}{\delta t}\right)$$
$$= \Sigma \left(X_t \frac{\delta x}{\delta t} + Y_t \frac{\delta y}{\delta t} + Z_t \frac{\delta z}{\delta t}\right),$$

qui leur est équivalente, car elle entraîne l'existence de chacune de ces équations en particulier. Telle est l'équation générale de la mécanique.

Dans le cas de l'équilibre, les accélérations sont nulles ainsi que les forces totales : donc :

$$\text{(II)} \quad \Sigma \left(X_t \frac{\delta x}{\delta t} + Y_t \frac{\delta y}{\delta t} + Z_t \frac{\delta z}{\delta t}\right) = 0.$$

C'est l'équation fondamentale de la statique des systèmes, qu'on interprète en disant qu'*un système matériel est en équilibre, si la somme des puissances virtuelles de toutes les forces tant intérieures qu'extérieures qui sollicitent ses points, est nulle pour tous les mouvements virtuels que l'on puisse concevoir.*

Ces deux relations et les $3n$ équations que chacune d'elles remplace, sont insuffisantes pour résoudre le problème proposé, car les forces de liaison et les forces moléculaires sont inconnues. Elles seraient de peu d'utilité, si l'on ne précisait dans la suite du cours, les conditions de leur emploi. Ce sera le but des théorèmes suivants.

200. **Théorème.** — *Les puissances virtuelles des forces de liaison sont nulles pour toutes les vitesses virtuelles compatibles avec les liaisons telles qu'elles existent à l'instant considéré.*

Nous raisonnons sur les liaisons représentées par des équations de la forme :

$$\mathrm{L}\,(x_1, y_1, z_1, \ldots \ldots z_n, t) = 0.$$

Ces liaisons produisent à un instant donné le même effet que des forces directement appliquées à chacun des points, forces qui pourraient remplacer les liaisons à ce moment là, si on les connaissait.

Considérons l'une de ces forces de liaison, celle du point M_1 par exemple. S'il n'y a qu'une liaison, il faut admettre que cette force est normale à la surface

$$\mathrm{L}\,(x_1, y_1, z_1, \ldots t) = 0,$$

dans laquelle x_1, y_1, z_1 seront seules variables, toutes les autres quantités prenant leurs valeurs actuelles.

S'il y a plusieurs liaisons (k par exemple), il faut admettre seulement que la force de liaison du point M_1 pourra se décomposer géométriquement suivant les k normales aux k surfaces déterminées comme ci-dessus, ce qui se vérifiera plus loin.

Pour chaque liaison, L par exemple, et pour chaque point M, les cosinus directeurs de la force de liaison normale à la surface correspondante seront $\Delta \frac{d\mathrm{L}}{dx}, \Delta \frac{d\mathrm{L}}{dy}, \Delta \frac{d\mathrm{L}}{dz}$ (167) et ses projections sur les trois axes seront de la forme :

$$\mu \frac{dL}{dx}, \quad \mu \frac{dL}{dy}, \quad \mu \frac{dL}{dz}.$$

La puissance virtuelle a donc pour expression :

$$\mu \left(\frac{dL}{dx} \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{dL}{dy} \frac{\delta y}{\delta t} + \frac{dL}{dz} \frac{\delta z}{\delta t}\right),$$

et la somme des puissances virtuelles pour la première liaison et pour tous les points sera :

$$\mu_1 \left(\frac{dL_1}{dx_1} \frac{\delta x_1}{\delta t} + \frac{dL_1}{dy_1} \frac{\delta y_1}{\delta t} + \frac{dL_1}{dz_1} \frac{\delta z_1}{\delta t}\right) + \mu_2 \left(\frac{dL_1}{dx_2} \frac{\delta x_2}{\delta t} + \dots\right) + \dots\dots$$

Par définition les vitesses virtuelles des points sont compatibles avec les liaisons lorsque les équations suivantes sont vérifiées :

$$\text{(IV)} \begin{cases} \dfrac{dL_1}{dx_1} \dfrac{\delta x_1}{\delta t} + \dfrac{dL_1}{dy_1} \dfrac{\delta y_1}{\delta t} + \dfrac{dL_1}{dz_1} \dfrac{\delta z_1}{\delta t} \dots + \dfrac{dL_1}{dz_n} \dfrac{\delta z_n}{\delta t} = 0, \\ \vdots \\ \dfrac{dL_K}{dx_1} \dfrac{\delta x_1}{\delta t} + \dots\dots\dots\dots\dots + \dfrac{dL_K}{dz} \dfrac{\delta z_n}{\delta t} = 0, \end{cases}$$

mais *provisoirement* nous dirons que les vitesses compatibles avec les liaisons sont précisément celles qui annulent la somme des puissances virtuelles des forces de liaison, savoir :

$$\text{(V)} \begin{cases} \mu_1 \left(\dfrac{dL_1}{dx_1} \dfrac{\delta x_1}{\delta t} + \dots\right) + \mu_2 \left(\dfrac{dL_1}{dx_2} \dfrac{\delta x_2}{\delta t} + \dots\right) + \dots = 0, \\ \nu_1 \left(\dfrac{dL_2}{dx_1} \dfrac{\delta x_1}{\delta t} + \dots\right) + \nu_2 \left(\dfrac{dL_2}{dx_2} \dfrac{\delta x_2}{\delta t} + \dots\right) + \dots = 0, \\ \vdots \\ \theta_1 \left(\dfrac{dL_K}{dx_1} \dfrac{\delta x_1}{\delta t} + \dots\right) + \dots \qquad = 0. \end{cases}$$

Plus loin l'égalité des μ_1, μ_2 ... des ν_1, ν_2 ... sera établie, et il ne restera d'autres conditions à remplir par les vitesses virtuelles que les équations (IV).

201. Théorème. — *La somme des puissances virtuelles des forces moléculaires est nulle pour les systèmes matériels, dans lesquels les distances entre les points suffisamment rapprochés pour réagir l'un sur l'autre, sont invariables.*

En vertu du n° 141, cette somme est de la forme $- \Sigma F \frac{\delta r}{\delta t}$,

puisque les forces moléculaires sont réciproques, et l'invariabilité des distances r, la rend nulle.

Il résulte de ce théorème que nous n'examinons pas dans ce chapitre les systèmes liquides et gazeux, qui seront étudiés dans une autre partie du cours.

202. Théorème. — *Dans un système matériel soumis à l'action de forces quelconques, la somme des puissances virtuelles des forces totales est égale à la somme des puissances virtuelles des forces directement appliquées, pour tous les mouvements virtuels compatibles avec les liaisons.*

Si nous reprenons en effet l'équation générale de la mécanique (199), les puissances virtuelles des forces de liaison et des forces moléculaires disparaissent, par suite des mouvements et des systèmes considérés. Il ne reste dans le second membre que les puissances des forces directement appliquées et l'équation (I) devient :

$$\text{(VI)} \quad \Sigma\left(m\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial t} + m\frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial t} + m\frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial t}\right)$$
$$\Sigma\left(X\frac{\partial x}{\partial t} + Y\frac{\partial y}{\partial t} + Z\frac{\partial z}{\partial t}\right),$$

X, Y, Z, étant les composantes suivant les axes d'une force directement appliquée quelconque.

Cette équation, qui maintenant n'est plus décomposable en équations partielles, sert à la détermination du mouvement. Dans ce problème les inconnues sont les $3n$ coordonnées des points, et nous les rechercherons au moyen de l'équation (VI), des k équations de liaison du système, indiquées ci-dessous,

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} L_1\,(x_1 y_1 z_1 \ldots\ldots \ldots\ldots z_n,\, t) = 0, \\ \vdots \\ L_k\,(x_1 y_1 \qquad z_n,\, t) = 0. \end{cases}$$

et des équations (V) admises comme définition des vitesses compatibles avec les liaisons.

On tire de ces équations k vitesses virtuelles en fonction des $(3n - k)$ autres qui deviennent complètement arbitraires. En substituant aux premières leurs valeurs dans (VI), on ne laisse subsister dans cette équation que les $(3n - k)$ vitesses arbitraires, dont les coefficients doivent nécessairement s'annuler. De

là $(3n - k)$ équations nouvelles qui forment système avec les k équations de liaison et servent à déterminer les $3n$ coordonnées en fonction du temps. Le calcul se fait d'une manière avantageuse par la méthode des multiplicateurs indéterminés de Lagrange. Elle consiste à multiplier les équations (IV) respectivement par les indéterminées :

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\ldots \lambda_k,$$

puis à les ajouter à l'équation (VI). Les vitesses virtuelles étant mises en évidence, il vient :

$$\text{(VII)} \quad \left(X_1 + \lambda_1 \frac{dL_1}{dx_1} \ldots\ldots + \lambda_k \frac{dL_k}{dx_1} - m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2}\right) \frac{\delta x_1}{\delta t} + \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots + \left(Z_n + \lambda_1 \frac{dL_1}{dz_n} \ldots\ldots + \lambda_k \frac{dL_K}{dz_n} - m_n \frac{d^2z_n}{dt^2}\right) \frac{\delta z_n}{\delta t} = 0.$$

L'indétermination de $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_k$ permet d'égaler à zéro les coefficients des k vitesses, considérées comme fonctions connues des $(3n - k)$ vitesses restantes, lesquelles sont arbitraires et ont leurs coefficients nuls. Tout revient donc à égaler simultanément à zéro les $3n$ coefficients de l'équation (VII) et il vient :

$$\text{(VIII)} \quad \begin{cases} X_1 + \lambda_1 \dfrac{dL_1}{dx_1} \ldots\ldots + \lambda_k \dfrac{dL_k}{dx_1} = m_1 \dfrac{d^2x_1}{dt^2}, \\ \vdots \\ Z_n + \lambda_1 \dfrac{dL_1}{dz_n} \ldots\ldots + \lambda_k \dfrac{dL_k}{dz_n} = m_n \dfrac{d^2z_n}{dt^2}. \end{cases}$$

A ces $3n$ équations, ajoutons les k équations de liaison (III) et le système analytique ainsi formé, donnera, abstraction faite des difficultés du calcul, les k coefficients et les $3n$ coordonnées en fonction du temps.

Cette méthode a l'avantage de déterminer les forces de liaison, car il est évident que l'on obtiendrait les mêmes équations du mouvement (VIII) et par conséquent le même mouvement dans la suite du temps, si on supprimait les liaisons et si on les remplaçait par des forces directement appliquées, ayant pour projections sur les axes

$$\lambda_1 \frac{dL_1}{dx_1} + \ldots\ldots \lambda_k \frac{dL_k}{dx_1},$$
$$\vdots$$
$$\lambda_1 \frac{dL_1}{dz_n} + \ldots\ldots + \lambda_k \frac{dL_k}{dz_n},$$

où les facteurs λ sont remplacés par leurs valeurs déduites du calcul précédent. Ce sont là aussi les projections sur les axes, des forces qui peuvent remplacer les liaisons, car le mouvement étant supposé complètement déterminé, les forces capables de le produire le sont aussi, et ne peuvent être exprimées que d'une seule manière.

Nous devons insister sur cette condition que les forces directement appliquées, conjointement avec les équations de liaison, suffisent pour déterminer complètement le mouvement. Si cela n'était pas vrai, le principe des vitesses virtuelles serait inapplicable. C'est cette condition même, qui exclut le cas du frottement et des liens élastiques, car l'équation d'une surface n'indique pas l'intensité du frottement qu'éprouvera un point assujetti à s'y mouvoir, de même que l'équation d'une droite ou d'une courbe appuyée sur une surface fixe, et représentant un lien élastique, n'indique pas les déformations que ce lien peut subir. Si alors de pareilles liaisons ne peuvent être remplacées à priori par des forces directement appliquées, il faut renoncer à l'application du principe.

C'est aussi la condition de la détermination complète du mouvement qui nous a permis de remplacer les équations (V) par les équations (IV) qui sont plus simples. Si nous avions conservé les μ, les ν etc. nous aurions abouti à des équations (VII) et (VIII) renfermant un nombre trop grand d'inconnues ou d'indéterminées. Nous aurions donc pu trouver de plusieurs manières des forces capables de remplacer les liaisons, ce qui est impossible, c'est-à-dire contraire aux conditions du problème.

Ce sont encore ces mêmes conditions qui justifient la décomposition de la force totale de liaison en un point, suivant les normales aux surfaces de liaison. Si ces surfaces sont au nombre de trois, la décomposition est toujours légitime. S'il y en a plus ou moins, tout mode de décomposition autre que celui que nous avons adopté, conduirait, encore une fois, à introduire des indéterminées surabondantes.

Faisons observer enfin que les équations de liaison, au lieu de ne contenir que les coordonnées et le temps (n° 200) pourraient contenir aussi, comme on l'a supposé pour les forces (n° 129), les dérivées premières des coordonnées par rapport au temps. Mais nous n'insisterons pas sur cette hypothèse, qui n'amènerait que des difficultés dans les applications que nous ferons du principe.

203. Détermination des constantes d'intégration. — Les équations qui donnent le mouvement du système matériel, comprennent n équations de liaison et $(3n - k)$ équations différentielles du second ordre. Leur intégration introduit $(6n - 2k)$ constantes arbitraires et l'on a :

$$\begin{aligned} x_1 &= f_1 (C_1, C_2, \ldots\ldots C_{6n-2k}, t), \\ &\vdots \\ z_n &= f_{3n} (C_1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots t). \end{aligned}$$

De ces $3n$ équations, il n'y en a que $(3n - k)$ distinctes, par suite des équations de liaison entre les coordonnées. Ne prenons donc que les $3n - k$ premières et dérivons-les par rapport à t; il vient :

$$3n - k \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f'_1 (C_1, C_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots t) \\ \vdots \end{array} \right.$$

Ces relations, jointes à celles dont elles dérivent, suffisent à la détermination des constantes, après que l'on y aura fait :

$$x_1, y_1 \ldots\ldots \frac{dx_1}{dt}, \ldots\ldots t,$$

égales à leurs valeurs initiales.

204. Remarque. — Nous avons négligé au n° 201 les actions entre les points du système sensiblement éloignés. Elles sont réciproques et la somme de leurs puissances virtuelles n'est qu'exceptionnellement nulle. S'il faut en tenir compte, nous ferons intervenir ces forces au même titre que les forces directement appliquées.

205. Cas particulier de l'équilibre. — Dans un système matériel en équilibre, les accélérations des points sont nulles et l'équation (VI) du n° 202 devient :

$$\text{(IX)} \quad \Sigma \left(X \frac{\delta x}{\delta t} + Y \frac{\delta y}{\delta t} + Z \frac{\delta z}{\delta t} \right) = 0.$$

Réciproquement si cette dernière équation se vérifie, non seulement à un instant donné, mais pendant un temps fini quelque petit

qu'il soit; si en outre le système est *au repos* au commencement de ce temps fini, c'est-à-dire que tous les $\frac{dx}{dt}$,... sont nuls, le système sera aussi *en équilibre* à ce même instant, c'est-à-dire que tous les $\frac{d^2x}{dt^2}$... seront nuls également.

En effet l'équation (VI) devient dans ce cas :

$$\text{(X)} \quad \Sigma m \left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\delta x}{\delta t} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\delta y}{\delta t} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\delta z}{\delta t}\right) = 0.$$

Or les vitesses virtuelles qui y entrent, satisfont non seulement à l'équation (IX), mais aussi aux relations (IV) du n° 200, puisqu'elles sont compatibles avec les liaisons. De ces équations tirons k vitesses virtuelles en fonction des $(3n - k)$ vitesses arbitraires restantes, qui après substitution, entreront seules dans (IX). Mettons les en évidence; les coefficients s'annulent, et nous obtenons $(3n - k)$ équations nouvelles, qui peuvent remplacer l'équation (IX) et qui sont d'ailleurs de nouvelles équations de liaison, venant s'ajouter au k équations de liaison déjà données. Deux hypothèses se présentent alors : 1° Toutes les équations sont indépendantes de t. — 2° Elles renferment cette variable.

Dans le premier cas, les $3n$ équations déterminent les $3n$ coordonnées. Comme les valeurs trouvées sont indépendantes du temps, les positions des points sont fixes et le système est en équilibre.

Examinons la seconde hypothèse. Nous admettons, comme nous l'avons déjà dit, que les dérivées premières n'entrent pas dans les équations.

Alors l'élimination de t laisse $(3n - 1)$ relations indépendantes du temps entre les $3n$ coordonnées, et par suite tout se passe comme si le système était à liaisons complètes. Toutes les coordonnées s'expriment donc en fonction de l'une d'elles et nous aurons :

$$y = \mu(x), \quad z = \gamma(x),$$
$$x_1 = \varphi_1(x), \quad y_1 = \pi_1(x), \quad z_1 = \psi_1(x),$$
$$x_2 = \varphi_2(x), \quad y_2 = \pi_2(x), \quad z_2 = \psi_2(x).....$$

d'où l'on tire :

$$\frac{\delta y}{\delta t} = \mu'(x)\frac{\delta x}{\delta t}, \quad \frac{\delta z}{\delta t} = \gamma'(x)\frac{\delta x}{\delta t}, \quad \frac{\delta x_1}{\delta t} = \varphi'_1(x)\frac{\delta x}{\delta t}, ...$$

De même :

$$\frac{dy}{dt} = \mu'(x) \frac{dx}{dt}, \ldots\ldots$$

et il vient en dérivant une seconde fois :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \mu''(x) \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{d^2x}{dt^2}\mu'(x),$$
$$\vdots$$

Si nous remplaçons les vitesses virtuelles et les accélérations projetées par leurs valeurs, dans l'équation (X), nous obtenons :

$$\frac{\delta x}{\delta t} \left\{ \frac{d^2x}{dt^2} \left[m + m\, \overline{\mu'(x)}^2 + m\, \overline{\gamma'(x)}^2 + m_1\, \overline{\varphi'_1(x)}^2 \ldots\ldots\right] \right.$$
$$+ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \left[m\, \mu'(x)\, \mu''(x) + m\, \gamma'(x)\, \gamma''(x)\right.$$
$$\left.\left. + m_1\, \varphi'_1(x)\, \varphi''_1(x) \ldots\ldots\right] \right\} = 0.$$

Or $\frac{\delta x}{\delta t}$ étant arbitraire, son coefficient est nul. Nous avons d'ailleurs admis qu'à l'époque considérée $\frac{dx}{dt} = 0$, donc la première ligne doit être nulle séparément.

Mais entre les crochets, se trouve une somme de termes positifs qui ne saurait être nulle, donc $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$. Il en est de même des autres accélérations, ce que nous exprimons en disant qu'il y a équilibre instantané dans le système. D'où le théorème : *Un système matériel est en équilibre sous l'action des forces de toutes espèces qui sollicitent ses points, quand la somme des puissances virtuelles des forces directement appliquées est nulle, pour tout mouvement virtuel compatible avec les liaisons.*

206. — Le problème de l'équilibre comprend deux parties :

1° Étant données les forces directement appliquées, trouver la figure d'équilibre du système.

2° Étant donnée la figure d'équilibre, trouver les forces directement appliquées au système, ou tout au moins les équations de condition, auxquelles elles doivent satisfaire.

Dans le premier cas, les inconnues sont les $3n$ coordonnées des points et dans le second, ce sont les $3n$ composantes des forces directement appliquées.

En opérant ainsi qu'il est dit au n° 202, nous formons $3n$ équa-

tions qui déterminent les coordonnées des points et la figure d'équilibre; si celle-ci est donnée, les équations de liaison ne peuvent servir, puisque les inconnues $X_1, Y_1, Z_1, \ldots\ldots Z_n$ n'y entrent pas et il y a $(3n - k)$ équations de condition entre les forces directement appliquées.

207. **Problème.** — On donne : 1° un système matériel formé de deux points M_1 et M_2, réunis par une tige rigide et sans masse ; 2° deux surfaces fixes S_1 et S_2, sur lesquels ces points doivent rester; 3° les forces directement appliquées $\overline{F_1}$ et $\overline{F_2}$ (*Fig.* 82). On demande le mouvement du système.

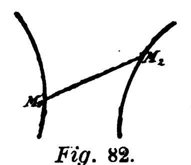


Fig. 82.

Soient m_1, m_2 les masses des deux points ; x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 leurs coordonnées : X_1, Y_1, Z_1 ; X_2, Y_2, Z_2 les composantes des forces directement appliquées ; $f_1(x, y, z) = 0$, $f_2(x, y, z) = 0$ les équations des surfaces; l la longueur de la tige.

Les équations de liaison sont :

$$(1) \quad f_1(x_1, y_1, z_1) = 0, \qquad (2) \quad f_2(x_2, y_2, z_2) = 0,$$

$$(3) \quad (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l^2.$$

Dans ce cas particulier, l'équation générale de la mécanique devient :

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} \frac{\delta x_1}{\delta t} + m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} \frac{\delta y_1}{\delta t} + m_1 \frac{d^2z_1}{dt^2} \frac{\delta z_1}{\delta t}$$

$$+ m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} \frac{\delta x_2}{\delta t} + m_2 \frac{d^2y_2}{dt^2} \frac{\delta y_2}{\delta t} + m_2 \frac{d^2z_2}{dt^2} \frac{\delta z_2}{\delta t}$$

$$= X_1 \frac{\delta x_1}{\delta t} + Y_1 \frac{\delta y_1}{\delta t} + Z_1 \frac{\delta z_1}{\delta t} + X_2 \frac{\delta x_2}{\delta t} + Y_2 \frac{\delta y_2}{\delta t} + Z_2 \frac{\delta z_2}{\delta t}.$$

Par la méthode de Lagrange, on trouve les équations :

$$(4) \quad m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = X_1 + \lambda_1 \frac{df_1}{dx_1} - \lambda_3 \frac{(x_2 - x_1)}{l},$$

$$(5) \quad m_1 \frac{d^2y_1}{dt^2} = Y_1 + \lambda_1 \frac{df_1}{dy_1} - \lambda_3 \frac{(y_2 - y_1)}{l},$$

$$(6) \quad m_1 \frac{d^2z_1}{dt^2} = Z_1 + \lambda_1 \frac{df_1}{dz_1} - \lambda_3 \frac{(z_2 - z_1)}{l},$$

$$(7) \quad m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = X_2 + \lambda_2 \frac{df_2}{dx_2} + \lambda_3 \frac{(x_2 - x_1)}{l},$$

$$(8) \quad m_2 \frac{d^2y_2}{dt^2} = Y_2 + \lambda_2 \frac{df_2}{dy_2} + \lambda_3 \frac{(y_2 - y_1)}{l},$$

$$(9) \quad m_2 \frac{d^2z_2}{dt^2} = Z_2 + \lambda_2 \frac{df_2}{dz_2} + \lambda_3 \frac{(z_2 - z_1)}{l}.$$

Ces équations déterminent en fonction du temps, les inconnues, x_1, y_1, z_1 ; x_2, y_2, z_2 ; $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Nous constatons que le point M_1 est rendu libre par l'intervention des forces dont les composantes sont :

$$\lambda_1 \frac{df_1}{dx_1}, \ \lambda_1 \frac{df_1}{dy_1}, \ \lambda_1 \frac{df_1}{dz_1},$$

$$-\lambda_3 \frac{(x_2 - x_1)}{l}, \ -\lambda_3 \frac{(y_2 - y_1)}{l}, \ -\lambda_3 \frac{(z_2 - z_1)}{l}.$$

Les forces correspondantes pour le point M_2 sont :

$$\lambda_2 \frac{df_2}{dx_2}, \ \lambda_2 \frac{df_2}{dy_2}, \ \lambda_2 \frac{df_2}{dz_2},$$

$$\lambda_3 \frac{x_2 - x_1}{l}, \ \lambda_3 \frac{y_2 - y_1}{l}, \ \lambda_3 \frac{z_2 - z_1}{l}.$$

Les trois premières de chaque groupe, sont les composantes des réactions des surfaces, sur les points M_1, M_2; les autres sont les composantes des réactions du lien rigide. Ces deux dernières ont la direction $M_1 M_2$, mais sont de sens opposés. Elles prennent le nom de *tractions* ou de *pressions*, suivant qu'elles tendent à rapprocher ou à éloigner les points M_1 et M_2. Un fil ne fonctionne que par *traction*. (Voir cours de M. Despeyrous).

208. **Remarque.** — Les courbes et les surfaces naturelles sont des liaisons auxquelles ne s'applique pas le théorème du n° 200. Elles développent des réactions obliques (127) et chacune d'elles donne une composante normale et une composante tangentielle. La puissance de la première est nulle pour tout mouvement sur la surface ou sur la courbe, mais il n'en est pas de même de la seconde, qui reste dans les équations. De là une difficulté sérieuse. Tant que cette composante n'a pas la valeur limite qui constitue le frottement de glissement, c'est-à-dire dans presque tous les problèmes de la statique, elle est exprimée par leproduit $N tg\, \varepsilon$, où la réaction N et l'angle ε sont inconnus. Aussitôt qu'elle atteint cette limite, ε prend une valeur α déterminée expérimentalement, mais N reste à calculer. C'est le cas de la dynamique.

Dans ces circonstances, la méthode des vitesses virtuelles perd ses avantages; cependant elle convient à l'étude générale du mouvement du solide libre, auquel on ramène le problème proposé par la méthode des réactions.

CHAPITRE XXI

THÉORÈMES GÉNÉRAUX DE LA MÉCANIQUE DES SYSTÈMES MATÉRIELS

209. L'intégration des $3n$ équations différentielles simultanées du second ordre qui déterminent le mouvement du système matériel, est généralement très difficile; mais on peut arriver, par la combinaison de ces équations, à certaines lois générales, conduisant dans un grand nombre de cas à des intégrales du mouvement et s'appliquant à tous les systèmes.

Définition. — *On appelle quantité totale de mouvement du système matériel à l'époque t, la somme géométrique des quantités de mouvement de tous ses points à l'instant considéré.*

Théorème. — *La résultante des forces extérieures au système matériel, est égale à la vitesse de son index sur la courbe indicatrice de la quantité totale de mouvement.* (*Fig.* 83).

Soient $\overline{F}_e$ et $\overline{F}_i$ les résultantes des forces extérieures et intérieures auxquelles est soumis un point quelconque du système; on a :

$$\frac{d.\overline{mv}}{dt} = \overline{F}_t = \overline{F}_e + \overline{F}_i \ (124).$$

En passant au système tout entier, il vient donc :

$$\frac{d.\Sigma\,\overline{mv}}{dt} = \Sigma\,\overline{F}_e + \Sigma\,\overline{F}_i;$$

or, par suite de la réciprocité des forces intérieures, $\Sigma\overline{F}_i = 0$, et

$$(1) \quad \frac{d\Sigma\,\overline{mv}}{dt} = \Sigma\,\overline{F}_e.$$

Par conséquent, si $\overline{o\mu}$ est le vecteur de la courbe indicatrice de la quantité totale de mouvement à l'instant t,

$$\frac{d.\overline{o\mu}}{dt} = \Sigma\,\overline{F}_e;$$

de là le théorème, qui peut encore s'énoncer comme suit : *La*

dérivée géométrique de la quantité totale de mouvement est égale à la résultante des forces extérieures au système.

Les trois équations de projections :

$$(2)\quad \frac{d}{dt}\Sigma m\frac{dx}{dt}=\Sigma X_e,\quad \frac{d}{dt}\Sigma m\frac{dy}{dt}=\Sigma Y_e,\quad \frac{d}{dt}\Sigma m\frac{dz}{dt}=\Sigma Z_e,$$

équivalentes à l'équation (1), conduisent à une proposition analogue : *La dérivée par rapport au temps de la quantité totale de mouvement projetée sur un axe fixe, est égale à la somme des projections des forces extérieures au système sur le même axe.*

Remarque. — S'il n'y a pas de forces extérieures, la quantité totale de mouvement est constante, les équations (2) s'intègrent immédiatement et donnent :

$$\Sigma m\frac{dx}{dt}=a,\quad \Sigma m\frac{dy}{dt}=b,\quad \Sigma m\frac{dz}{dt}=c,$$
$$\Sigma mx=at+a',\quad \Sigma my=bt+b',\quad \Sigma mz=ct+c',$$

a, b, c, a', b', c' désignant des constantes arbitraires. Nous obtenons six intégrales du problème, dont trois en quantités finies.

210, **Définition.** — On appelle *centre de gravité* ou centre d'*inertie* d'un système matériel, le point dont les coordonnées x_1, y_1, z_1 sont définies par les relations :

$$x_1=\frac{\Sigma mx}{M},\quad y_1=\frac{\Sigma my}{M},\quad z_1=\frac{\Sigma mz}{M},$$

dans lesquelles m est la masse d'un point du corps, x, y, z ses coordonnées et M la masse totale du système.

Théorème. — *Le centre de gravité d'un système matériel se meut comme un point de masse égale à la masse totale du système, et qui serait soumis à la résultante des forces extérieures.*

En effet, nous tirons des équations du centre de gravité, dérivées par rapport au temps :

$$M\frac{dx_1}{dt}=\Sigma m\frac{dx}{dt},\quad M\frac{dy_1}{dt}=\Sigma m\frac{dy}{dt},\quad M\frac{dz_1}{dt}=\Sigma m\frac{dz}{dt}.$$

Dérivons-les une seconde fois en tenant compte des équations (2) du nº 209 ; il vient :

$$M \frac{d^2x_1}{dt^2} = \Sigma X_e, \quad M \frac{d^2y_1}{dt^2} = \Sigma Y_e, \quad M \frac{d^2z_1}{dt^2} = \Sigma Z_e.$$

Ce sont les équations du mouvement d'un point de masse M, soumis aux forces dont les projections sont ΣX_e, ΣY_e, ΣZ_e.

S'il n'y a pas de forces extérieures, ou si la résultante de ces forces est constamment nulle, on a :

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y_1}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2z_1}{dt^2} = 0.$$

Le mouvement du centre de gravité est alors rectiligne et uniforme. C'est très sensiblement ce qui a lieu pour notre système planétaire, où les forces extérieures, dues aux seules actions des étoiles, sont négligeables. Le mouvement rectiligne et uniforme du centre de gravité n'est pas modifié par les différents phénomènes qui se produisent dans ce système, parce qu'ils sont produits par des forces intérieures.

Dans le même ordre d'idées, et abstraction faite de la résistance de l'air, le centre de gravité de l'obus lancé dans l'espace, décrit une parabole qui n'est pas modifiée par l'explosion, puisqu'elle est due aux forces intérieures. Mais quand un des éclats rencontre un obstacle, la réaction de celui-ci intervient comme force extérieure dans le mouvement du centre de gravité.

Le théorème précédent donne aussi l'explication du recul des bouches à feu pendant le tir. Considérons une pièce et son affût, tous deux en équilibre sur un plan horizontal. Le centre de gravité est immobile, son accélération nulle, et la résultante des forces extérieures égale à zéro. Ces forces sont le poids du système et la réaction du plan ; elles sont verticales, égales et de sens opposés. La déflagration de la charge engendre des forces intérieures, sans influence sur la position du centre de gravité. Dans ces conditions, le départ de l'obus et des gaz vers l'avant, produit un déplacement correspondant de la pièce et de son affût vers l'arrière, que l'on pourrait déterminer, si la résistance de l'air et le frottement n'intervenaient comme forces extérieures, de sorte qu'en réalité le centre de gravité n'est pas rigoureusement immobile pendant le recul.

Le même théorème rend compte du mouvement des fusées, des navires, des aérostats, de la marche des hommes et des animaux. Prenons le cas d'un homme en équilibre sur un sol horizontal parfaitement poli. La réaction du sol est verticale et directement

opposée au poids du corps ; ce sont les seules forces extérieures, car toutes les actions développées sont intérieures et ne peuvent modifier la position du centre de gravité. S'il en est ainsi, le déplacement d'une jambe vers l'avant, exigerait un déplacement vers l'arrière de l'autre jambe, de façon à maintenir immobile le centre de gravité. Le mouvement deviendrait impossible, si le frottement n'intervenait en réalité comme force extérieure, pour s'opposer au glissement vers l'arrière du pied sur lequel on s'appuie. Nous trouvons là l'explication de la difficulté qu'on éprouve à se mouvoir sur un sol glissant. Le frottement, souvent nuisible, est utile dans l'exemple discuté.

211. Théorème du moment résultant des quantités de mouvement. — La quantité de mouvement et la force sont représentées par des vecteurs, ce qui permet de leur appliquer la théorie vectorielle. Dès lors $\Sigma \overline{M_o mv}$, $\Sigma \overline{M_o F_e}$ sont les moments résultants des quantités de mouvement et des forces extérieures par rapport au point o et on a la proposition suivante :

Le moment résultant des forces extérieures au système matériel par rapport à un point fixe, est équipollent à la vitesse de l'index sur la courbe indicatrice du moment résultant des quantités de mouvement par rapport à ce point (*Fig.* 83).

En effet, pour un point quelconque du système rendu libre, nous avons l'équation des moments (138) :

$$\frac{d.\overline{M_o mv}}{dt} = \overline{M_o F_t} ;$$

Fig. 83.

mais en vertu du n° 138 et avec les notations connues, on a :

$$\overline{M_o F_t} = \overline{M_o F_e} + \overline{M_o F_i}.$$

Tenons compte de ce résultat et passons au système tout entier ; il vient :

$$\frac{d.\Sigma \overline{M_o mv}}{dt} = \Sigma \overline{M_o F_e} + \Sigma \overline{M_o F_i},$$

or $\Sigma \overline{M_o F_i} = 0$, par suite de la réciprocité des forces intérieures, donc :

$$\frac{d.\Sigma\overline{M_0mv}}{dt} = \Sigma\overline{M_oF_e}.$$

Mais si $\overline{o\mu}$ est le vecteur de la courbe indicatrice du moment résultant des quantités de mouvement (*Fig.* 83), cette égalité s'écrit :

$$\frac{d.\overline{o\mu}}{dt} = \Sigma\,\overline{M_oF_e}.$$

L'équation précédente se remplace par trois équations de projection sur les axes rectangulaires issus du point fixe O. Ce sont :

$$\Sigma\left(\frac{dz}{dt}y - \frac{dy}{dt}z\right) = \frac{d}{dt}\Sigma m\left(Z_e y - Y_e z\right),$$
$$\Sigma\left(\frac{dx}{dt}z - \frac{dz}{dt}x\right) = \frac{d}{dt}\Sigma m\left(X_e z - Z_e x\right),$$
$$\Sigma\left(\frac{dy}{dt}x - \frac{dx}{dt}y\right) = \frac{d}{dt}\Sigma m\left(Y_e x - X_e y\right).$$

De là ce théorème : *La dérivée par rapport au temps du moment résultant des quantités de mouvement d'un système matériel, relativement à un axe fixe, est égale au moment résultant des forces extérieures par rapport à cet axe.*

Si le moment résultant des forces extérieures est nul par rapport au point fixe, le moment résultant des quantités de mouvement du système par rapport à ce point, et par rapport à tout axe qui y passe, est constant. D'où les trois équations :

$$\Sigma m\left(\frac{dz}{dt}y - \frac{dy}{dt}z\right) = a, \quad \Sigma m\left(\frac{dx}{dt}z - \frac{dz}{dt}x\right) = b,$$
$$\Sigma m\left(\frac{dy}{dt}x - \frac{dx}{dt}y\right) = c;$$

ce sont des intégrales du mouvement et a, b, c, sont les constantes d'intégration.

212. Théorème des aires. — *Si dans un système matériel le moment résultant des forces extérieures, par rapport à un centre fixe pris pour pôle est nul, la somme des aires décrites sur un plan quelconque par les projections des rayons vecteurs des points du système, multipliées par les masses de ceux-ci, varie proportionnellement au temps.*

Prenons le centre fixe O pour origine des axes rectangulaires

de coordonnées. De l'énoncé du théorème résulte que $\Sigma \overline{M_o mv}$ et ses projections $\Sigma M_x mv$, $\Sigma M_y mv$, $\Sigma M_z mv$, sont constantes. Si donc H, λ, μ, ν, désignent la grandeur et les angles directeurs de $\Sigma \overline{M_o mv}$, il vient :

$$\Sigma m \left(\frac{dz}{dt} y - \frac{dy}{dt} z\right) = \text{H} \cos \lambda,$$

$$\Sigma m \left(\frac{dx}{dt} z - \frac{dz}{dt} x\right) = \text{H} \cos \mu,$$

$$\Sigma m \left(\frac{dy}{dt} x - \frac{dx}{dt} y\right) = \text{H} \cos \nu.$$

Or les parenthèses sont les doubles vitesses aréolaires des projections d'un point quelconque du système sur les plans de coordonnées (52); nous aurons donc, pour le plan des XY et en conservant les notations connues :

$$\Sigma mr^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{H} \cos \nu = \text{C}.$$

Cette équation intégrée donne enfin :

$$(1) \qquad \Sigma \frac{1}{2} \int_o^\theta mr^2 \, d\theta = \frac{\text{C}t}{2}.$$

Plan du maximum des aires. Lorsque la direction de l'axe OZ est variable, le maximum du second membre de l'équation (1) a lieu pour $\cos \nu = 1$. Dans ces conditions OZ devient parallèle à $\Sigma \overline{M_o mv}$, et le plan XOY, qui lui est perpendiculaire, prend le nom de plan du *maximum des aires*, ou bien encore de *plan invariable*. Sa direction est en effet invariable, puisque $\Sigma \overline{M_o mv}$, par rapport au point fixe, est constant.

Remarque. — *Si le moment résultant des forces extérieures par rapport à un axe fixe passant par l'origine des rayons vecteurs est constamment nul, la somme des aires décrites par les projections des rayons vecteurs des points du système matériel sur un plan perpendiculaire à l'axe, multipliées par les masses de ces points, varie proportionnellement au temps.*

213. Les théorèmes précédents trouvent des applications nombreuses, basées sur la propriété qui leur est commune, d'être indépendants des forces intérieures.

Nous avons montré déjà qu'un homme, reposant sur un plan horizontal parfaitement poli, ne peut déplacer son centre de gravité. Mais il y a plus : il lui est impossible d'imprimer à tout son corps un mouvement de rotation, car du théorème des aires, applicable à la verticale du centre de gravité, on tire :

$$\Sigma \int_0^\theta mr^2 d\theta = Ct.$$

Or à l'origine du mouvement C est nul, puisque le corps est immobile et

$$\Sigma \int_0^\theta mr^2 d\theta = 0.$$

A toute rotation d'une partie du corps dans un sens, correspond donc une rotation en sens inverse d'une autre partie, de telle façon que la somme des aires positives, multipliées par les masses respectives des points, reste constamment égale à la somme des aires négatives, multipliées par les masses correspondantes.

Cette déduction du théorème des aires semble en contradiction avec ce fait que les chats retombent toujours sur leurs pattes, alors même que toutes les précautions sont prises pour empêcher l'intervention des réactions des points de suspension. M. Marcel Deprez a étudié ce phénomène au moyen d'un appareil, décrit dans les *Comptes rendus* de l'Académie des sciences de Paris, et qui consiste en deux masses pesantes décrivant deux courbes fermées telles que leur centre de gravité reste fixe. Cette fixité permet de suspendre cet appareil, sans que le point de suspension puisse intervenir dans les efforts mis en jeu.

Cela étant, lorsque les masses pesantes décrivent leur courbe fermée, on constate que l'ensemble du système éprouve un déplacement angulaire, fonction du rapport des masses en mouvement et de la masse totale du système, quoique les différents organes de ce système soient revenus rigoureusement à leur position de départ, c'est-à-dire sans qu'il y ait eu de déplacement relatif dans l'ensemble de l'appareil avant et après le mouvement.

En répétant ces mouvements, on conçoit que l'on puisse obtenir une rotation à 180° ou même complète de tout le système.

C'est de cette façon que le chat, faisant avec ses pattes des mouvements analogues à celui des boules de l'appareil, obtient son redressement dans sa chute.

Cette expérience montre qu'on a quelquefois mal interprété le principe des aires. Pour écrire l'équation correspondante, relative à un axe quelconque, il ne suffit pas d'examiner la position initiale et la position finale de chaque point matériel ; il faut encore voir combien de tours il a faits, et dans quel sens. En un mot, il faut prendre la somme des aires pour toute la trajectoire réelle.

214. Définition. — *On appelle force vive totale d'un système matériel, la somme des forces vives des points qui le composent.* Elle est égale à Σmv^2.

Théorème. — *La dérivée de la demi-force vive totale est égale à la somme des puissances de toutes les forces tant intérieures qu'extérieures du système considéré.*

En effet, pour chacun des points du système rendus libres, nous avons la relation :

$$\frac{d.\frac{mv^2}{2}}{dt} = X_t \frac{dx}{dt} + Y_t \frac{dy}{dt} + Z_t \frac{dz}{dt};$$

d'où, en passant au système tout entier, il vient :

$$(1) \quad \frac{d\Sigma \frac{mv^2}{2}}{dt} = \Sigma \left(X_t \frac{dx}{dt} + Y_t \frac{dy}{dt} + Z_t \frac{dz}{dt}\right).$$

215. Théorème de la force vive. — *L'accroissement de la demi-force vive totale d'un système matériel entre deux époques, est égal à la somme des travaux des forces tant intérieures qu'extérieures pendant ce temps.*

C'est ce qui résulte de l'intégration de l'équation précédente, qui donne :

$$(2) \quad \Sigma \frac{mv^2}{2} - \Sigma \frac{mv_0^2}{2} = \int_0^t \Sigma \left(X_t \frac{dx}{dt} + Y_t \frac{dy}{dt} + Z_t \frac{dz}{dt}\right).$$

En général, les travaux des forces de liaison entrent dans le second membre de l'équation, car la vitesse réelle n'est pas toujours compatible avec la liaison telle qu'elle existe à l'instant considéré. Ainsi les vitesses virtuelles compatibles avec la liaison L $(x_1, y_1, \dots t) = 0$, à l'époque t, satisfont à la relation :

$$\Sigma\left(\frac{dL}{dx}\frac{\delta x}{\delta t} + \frac{dL}{dy}\frac{\delta y}{\delta t} + \frac{dL}{dz}\frac{\delta z}{\delta t}\right) = 0, \quad (200)$$

tandis que les vitesses réelles vérifient l'équation :

$$\frac{dL}{dt} + \Sigma\left(\frac{dL}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dL}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{dL}{dz}\frac{dz}{dt}\right) = 0.$$

Ces deux conditions ne se confondent que si $\frac{dL}{dt} = 0$, ce qui suppose les liaisons indépendantes du temps.

216. **Intégrale de la force vive.** — Supposons que les équations de liaisons soient indépendantes du temps. Alors le mouvement réel $\frac{dx}{dt}$, ... est compatible avec les liaisons et la somme des puissances des forces de liaison pour ce mouvement là est nulle. Nous pourrons donc supprimer ces puissances dans les équations (1) du n° 214 et (2) du n° 215 et considérer X_t, Y_t, Z_t, comme ne renfermant plus que les forces directement appliquées (y compris les forces moléculaires).

Si alors on admet, de plus, que

$$\Sigma\left(X_t\frac{dx}{dt} + Y_t\frac{dy}{dt} + Z_t\frac{dz}{dt}\right)$$

soit la dérivée totale d'une certaine fonction φ des coordonnées des points du système, la fonction φ sera appelée *fonction des forces* et nous obtiendrons l'intégrale de l'équation (1) :

$$\Sigma\frac{1}{2}mV^2 - \Sigma\frac{1}{2}mV_o^2 = \varphi(x_1, y_1, \dots z_n) - \varphi(x_1, \dots z_n)_o.$$

C'est l'*intégrale de la force vive*. Elle fait connaître l'accroissement de la force vive totale entre deux époques, par les positions du système matériel aux instants considérés. Chaque fois que celui-ci reprend la même position dans l'espace, sa force vive totale reprend la même valeur. C'est en cela que consiste le *principe de la conservation de la force vive*. Enfin quand la dérivée de la fonction des forces s'annule, la fonction ainsi que la force vive totale passent par un maximum ou un minimum.

Les positions correspondantes sont des positions d'équilibre instantané dans le sens que nous avons donné à cette expression.

Cela veut dire que si l'on y plaçait le système matériel, sans vitesse initiale, avec les mêmes liaisons indépendantes du temps,

et les mêmes forces, dérivées partielles d'une même fonction des coordonnées, tous les points conserveraient indéfiniment leurs positions.

Pour démontrer ce fait, il suffit d'observer que les calculs à effectuer pour déterminer les maximums et les minimums de la fonction des forces sont exactement les mêmes que ceux qu'il faut opérer pour obtenir les positions d'équilibre (nº 206). Les δ seront remplacés par des d, mais les uns et les autres disparaissent dans le résultat final.

217. L'équilibre possède des propriétés différentes suivant qu'il correspond au maximum ou au minimum de la fonction des forces. Elles résultent du théorème de Lejeune-Dirichlet, basé sur la définition suivante : *L'équilibre d'un système matériel est stable, quand les points qui le composent, peuvent être écartés assez peu de leurs positions d'équilibre, pour qu'abandonnés ensuite à eux-mêmes, sans vitesses initiales, ils ne s'écartent jamais que très peu de leurs positions d'équilibre par suite de l'action des forces qui agissent sur le système.*

Lorsque les forces tant intérieures qu'extérieures qui agissent sur le système matériel admettent une fonction des forces, les positions d'équilibre stable correspondent aux maximums de la fonction, et les positions d'équilibre instable aux minimums.

Supposons, en effet, le système matériel écarté assez peu de sa position d'équilibre, pour que les positions nouvelles des points qui en font partie, restent dans la zone de l'espace, à laquelle se rapporte le maximum ou le minimum considéré. C'est dans cette position initiale, que nous l'abandonnons sans vitesse à l'action des forces. Il prendra un certain mouvement. Or, la force vive qui en sera la conséquence, étant essentiellement positive, la fonction des forces augmente. S'il y avait donc maximum dans la position d'équilibre donnée, le système tend à s'en rapprocher; s'il y avait minimum il tend à s'en éloigner.

A la vérité, ce raisonnement très simple n'est pas suffisamment rigoureux, mais la démonstration si délicate de Lejeune-Dirichlet nous entraînerait hors des limites du cours.

218. **Potentiel des forces intérieures.** — Séparons les travaux des forces intérieures des travaux des forces extérieures, et écrivons l'équation de la force vive sous la forme :

$$\Sigma\frac{1}{2}mV^2 - \Sigma\frac{1}{2}mV_o^2 = \Sigma\,(T_r.F_e)_o^t + \Sigma\,(T_r.F_i)_o^t.$$

Les forces intérieures sont dues aux actions réciproques des points du système matériel. Elles se mesurent, par les produits des masses des deux points dont elles émanent, par une certaine fonction de leur distance. L'intensité de l'une d'elles est donc représentée par une expression de la forme $mm'f(r)$. D'après nos conventions, ces forces, positives quand il y a attraction, sont négatives lorsqu'il y a répulsion (151). Or la somme des puissances de deux forces réciproques est égale à $-\ mm'f'(r)\ \frac{dr}{dt}$ (141). Si nous étendons ce résultat au système tout entier, nous obtenons :

$$-\ \Sigma mm'f'(r)\ \frac{dr}{dt}.$$

Mais r étant uniquement fonction des coordonnées des points qu'elle sépare, nous pouvons considérer $-\ \Sigma mm'f'(r)\frac{dr}{dt}$ comme la dérivée totale d'une fonction des coordonnées des points du système, que nous appelons *fonction des forces intérieures*. Elle est représentée par $-\ \pi\ (x_1, y_1, z_1, ...)$. Il suffit donc que les forces extérieures aient une fonction des forces, pour qu'il en soit de même pour toutes les forces du système.

Reprenons la fonction des forces intérieures. Elle passe généralement par plusieurs maximums ; pour chacun d'eux l'équilibre intérieur du système est stable et les valeurs correspondantes de la fonction π sont des minimums.

Prenons le plus petit de ces minimums et admettons qu'il soit nul. Cette hypothèse peut toujours être faite, car la fonction π renferme une constante arbitraire d'intégration dont nous disposons. Pour toute autre position du système, la valeur de π est positive et la fonction des forces négative. Le travail maximum, nécessairement positif, que les forces intérieures seraient capables de développer, si le système quittait la position actuelle pour retourner à la position d'équilibre stable qui correspond au plus grand maximum de la fonction des forces, est égal à $0 - (-\ \pi)$ ou $+\ \pi$. C'est le *potentiel des forces intérieures ou simplement le potentiel.*

L'équation de la force vive devient donc :

$$\Sigma\ \frac{1}{2}\ m\ V^2 - \Sigma\ \frac{1}{2}\ m\ V_o^2 = \Sigma\ (T_r\ F_e)_o^t + \pi_o - \pi.$$

Nous ferons à ce sujet trois observations :

1° La fonction des forces intérieures et le potentiel ne dépendent que des positions relatives des points du système matériel. Elles reprennent les mêmes valeurs quand ce dernier reprend la même figure.

2° Les travaux des forces intérieures sont nuls, quand le système matériel est indéformable.

3° Les travaux des forces intérieures disparaissent pour toute partie indéformable du système.

En conséquence :

1° L'accroissement de la demi-force vive totale d'un système indéformable entre deux époques, est égal à la somme des travaux des forces extérieures pendant cette période.

Si les liaisons sont indépendantes du temps, il ne reste que les travaux des forces directement appliquées ; c'est ce qui a lieu quand des points du système doivent demeurer sur des courbes ou des surfaces sans frottement. En réalité, dans les systèmes naturels les frottements interviennent comme forces extérieures.

2° Quand le système matériel reprend la même figure après certains intervalles de temps, l'accroissement de la demi-force vive pendant chacun d'eux, est égal à la somme des travaux des forces extérieures. C'est le cas pour une machine rotative, dont la période est constituée par un tour de l'arbre premier moteur.

219. Application du théorème de la force vive au système matériel sur lequel n'agissent pas de forces extérieures. — Le théorème de la force vive devient dans cette hypothèse :

$$(1) \quad \left(\Sigma \frac{1}{2} m V^2 + \pi\right) - \left(\Sigma \frac{1}{2} m V_0^2 + \pi_0\right) = 0.$$

$\Sigma \frac{1}{2} m V^2$ est l'*énergie actuelle ou cinétique* du système, π est l'*énergie potentielle interne*, $\Sigma \frac{1}{2} m V^2 + \pi$ l'*énergie totale*. Nous traduirons l'équation (1) en disant que l'énergie totale du système est constante. C'est ainsi que l'énergie totale de l'univers est invariable, puisque toutes les forces lui sont nécessairement intérieures.

L'énergie cinétique et l'énergie potentielle sont alors complémentaires ; quand l'une augmente, l'autre diminue exactement de la même quantité et vice-versa. Lorsqu'il y a des forces

extérieures, l'équation de la force vive se met sous la forme suivante :

$$\left(\Sigma \frac{1}{2} m V^2 + \pi\right) - \left(\Sigma \frac{1}{2} m V_o^2 + \pi_o\right) = \Sigma (T_r . F_e)_o^t$$

donc : l'*accroissement de l'énergie totale d'un système matériel entre deux époques est égal à la somme des travaux des forces extérieures pendant la même période.*

220. **Remarque importante.** — Il est nécessaire, dans l'application du principe de la force vive, de faire intervenir tous les mouvements des points du système matériel, aussi bien ceux qui nous échappent que ceux que nous percevons. Tels sont les mouvements vibratoires des atomes, dont la rapidité varie avec les ondes lumineuses, calorifiques ou électriques, qui viennent frapper le système. La force vive correspondante est l'énergie cinétique interne.

Considérons particulièrement l'action de la chaleur. Elle modifie l'énergie cinétique interne, en augmentant ou en diminuant la rapidité des mouvements vibratoires, suivant que la chaleur est reçue ou émise. L'énergie potentielle en dépend également, puisque le corps se dilate ou se contracte dans les mêmes hypothèses.

Nous tenons compte de ces phénomènes en énonçant le théorème de la force vive comme suit : *L'accroissement de l'énergie totale d'un système de points matériels est égal à la somme des travaux des forces extérieures, plus ou moins le travail équivalent aux calories reçues ou émises.*

Une des causes principales de la déperdition de la chaleur est le frottement. En pratique, les surfaces qui viennent en contact se déforment, bien que les dimensions des organes de machines soient calculées de manière à ce que les déformations subies restent faibles. Il y a une modification incessante de ces surfaces et par conséquent une répartition moléculaire essentiellement variable. Les forces moléculaires ainsi évoquées, donnent lieu à une consommation de travail transformé en chaleur et perdu ensuite par rayonnement. Les calories disparues de cette façon mesurent le travail du frottement. C'est sur cette idée que Hirn, et plus tard M. Dwelshauvers Dery, se sont basés pour déterminer l'équivalent mécanique de la chaleur.

221. Application du principe des forces vives aux machines. — Les machines sont des systèmes à liaisons complètes, et les trajectoires des différents points sont parfaitement déterminées. Ceci est une grande facilité pour l'évaluation des travaux des forces extérieures qui agissent sur les machines et parmi lesquelles nous rangeons les frottements. Nous pouvons ainsi faire abstraction des phénomènes thermiques que nous venons d'indiquer, puisque l'énergie calorifique perdue par le rayonnement est équivalente au travail consommé par les frottements, si la machine conserve sa température constante.

Les forces extérieures à la machine se divisent en deux catégories :

1° Les *forces motrices* qui agissent dans le sens du déplacement de leurs points d'application.

2° Les *résistances* qui agissent en sens inverse.

Le travail développé par les forces motrices est le ***travail moteur***, le travail des résistances est le ***travail résistant total***. Nous distinguons dans celui-ci :

1° Le travail des résistances utiles T_u; c'est, par exemple, le travail consommé par l'outil.

2° Le travail des résistances nuisibles, qui comprend le travail des frottements et le travail absorbé par les chocs. Il amène la disparition continue, sous forme d'énergie calorifique, d'une fraction du travail moteur livré à la machine. Nous le désignons par T_n.

L'équation de la force vive appliquée aux machines devient donc :

$$\Sigma \frac{1}{2} m V^2 - \Sigma \frac{1}{2} m V_0^2 = [T_m - T_u - T_n]_0^t.$$

Elle suffit pour déterminer le mouvement du système, car nous possédons $(3n - 1)$ équations de liaison entre les coordonnées des points, ce qui permet de calculer les vitesses dont ils sont animés, en fonction de l'une d'elles, qui entre comme seule inconnue dans l'équation de la force vive.

Ajoutons que dans toute application du principe de la force vive, on doit tenir compte des masses qui ont pénétré dans le système matériel et de l'énergie qu'elles véhiculent. Dans le cylindre de la machine à vapeur, par exemple, le fluide moteur entré pendant l'admission, quitte le cylindre pendant l'émission, en emportant de l'énergie, principalement sous forme de calories.

222. Remarque. — Pour nous guider dans le choix des principes auxquels il faut avoir recours, dans les problèmes de mécanique, nous ferons les observations suivantes :

1° Les théorèmes des quantités de mouvement, du moment des quantités de mouvement et du centre de gravité, ne renferment pas les forces intérieures. Leur emploi est tout indiqué dans les problèmes où ces forces sont inconnues. Mais il faut tenir compte, le cas échéant, des liaisons en les remplaçant, s'il se peut, par des forces.

2° Le théorème du centre de gravité donne immédiatement le mouvement des systèmes matériels animés d'une translation.

3° Le théorème des quantités de mouvement projetées et le théorème du centre de gravité conviennent aux mouvements de translation, tandis que le théorème des moments convient aux mouvements de rotation.

4° Le théorème des forces vives élimine toutes les forces dont les travaux sont nuls. Il est surtout utile lorsqu'on connaît les trajectoires des différents points, car les travaux s'évaluent alors plus facilement. Il donne l'espace ou la vitesse, tandis que les premiers théorèmes, ne renfermant pas le chemin parcouru d'une façon explicite, donnent plutôt le temps ou la vitesse.

223. Mouvement relatif. — Les théorèmes généraux sont applicables au mouvement relatif des systèmes matériels, mais à la condition d'adjoindre aux forces totales qui sollicitent réellement chacun des points, les deux forces fictives appelées force centrifuge composée et force d'inertie d'entraînement (188).

Il est à remarquer que les travaux des forces centrifuges composées sont toujours nuls, parce qu'elles sont normales aux vitesses relatives ; elles n'entrent donc pas dans l'équation de la force vive.

De plus, les travaux des forces intérieures sont les mêmes dans le mouvement relatif que dans le mouvement absolu, car ils ne dépendent que des positions des points du système les uns par rapport aux autres, et non de leurs positions absolues. Cette observation ne s'applique pas à la force d'inertie d'entraînement qu'il faudrait adjoindre à une force intérieure, si celle-ci constituait, à elle seule, la force totale.

224. Théorème. — *La quantité totale de mouvement d'un système matériel relativement aux axes mobiles qui ont pour origine le centre de gravité, est nulle.*

Dans cette hypothèse les coordonnées du centre de gravité sont nulles, et les équations qui définissent ce point (210) deviennent :

$$0 = \Sigma mx, \quad 0 = \Sigma my, \quad 0 = \Sigma mz,$$

d'où :

$$\Sigma m \frac{dx}{dt} = 0, \quad \Sigma m \frac{dy}{dt} = 0, \quad \Sigma m \frac{dz}{dt} = 0.$$

Mais $\Sigma m \frac{dx}{dt}$, $\Sigma m \frac{dy}{dt}$, $\Sigma m \frac{dz}{dt}$ sont les projections de la quantité totale de mouvement relative aux axes considérés, celle-ci est donc nulle.

225. **Théorème.** — *La force vive totale d'un système matériel est la somme de la force vive de la masse entière concentrée au centre de gravité, et de la force vive totale relative à des axes de directions constantes passant par ce point.*

Soient $\overline{V}_e$, $\overline{V}_r$, $\overline{V}_a$ les vitesses d'entraînement, relative et absolue d'un point quelconque du système. Nous avons :

$$\overline{V}_a = \overline{V}_e + \overline{V}_r, \quad (79)$$

par conséquent :

$$V_a^2 = V_e^2 + V_r^2 + 2V_eV_r \cos \widehat{V_eV_r}.$$

Multiplions par la masse du point et passons à tout le système, il vient :

$$\Sigma mV_a^2 = \Sigma mV_e^2 + \Sigma mV_r^2 + 2\Sigma mV_eV_r \cos \widehat{V_eV_r}.$$

Mais, d'une part, le mouvement d'entraînement étant une translation, nous avons :

$$\Sigma mV_eV_r \cos \widehat{V_eV_r} = V_e\Sigma mV_r \cos \widehat{V_eV_r},$$

et d'autre part $\Sigma mV_r \cos \widehat{V_eV_r}$ est nulle, comme projection de la quantité totale de mouvement relative aux axes considérés, sur la direction de $\overline{V}_e$ (224) ; donc :

$$\Sigma mV_a^2 = \Sigma mV_e^2 + \Sigma mV_r^2 = V_e^2\Sigma m + \Sigma mV_r^2$$
$$= MV_e^2 + \Sigma mV_r^2.$$

Ce théorème reçoit de nombreuses applications. Ainsi, par exemple, la force vive de la terre se calcule en partant du mouve-

ment de rotation uniforme autour de la ligne des pôles, et de la translation sur l'écliptique ; la force vive totale d'un train se compose de la force vive de translation et de la force vive de rotation provenant des essieux et des roues. De même pour un obus on recherchera la force vive dans la rotation autour de son axe et on y ajoutera la force vive de translation.

Ces applications exigent la notion des moments d'inertie, développée seulement au chapitre XXIV.

CHAPITRE XXII

§ 1. *Équations du mouvement du corps solide libre*

226. Les équations du mouvement du solide libre se déduisent de l'équation générale de la mécanique, par cette remarque que tous les mouvements indiqués au n° 113 sont compatibles avec l'invariabilité du système. Un quelconque d'entre eux est résultant d'une translation $\overline{V}$ variable avec le point directeur et d'une rotation simultanée $\overline{\omega}$ autour d'un axe instantané OI. Or, la puissance virtuelle d'une force $\overline{F}$ appliquée au point M appartenant au corps ou lié au corps, devient :

$$FV \cos \widehat{FV}, \quad \omega M_{OI}F, \quad FV \cos \widehat{FV} + \omega M_{OI}F,$$

suivant que l'on prend la translation (140), la rotation (142) ou le mouvement résultant (140).

La somme des puissances virtuelles des forces directement appliquées, pour tout mouvement compatible avec l'invariabilité du système, est donc :

$$\Sigma FV \cos \widehat{FV} + \Sigma\omega M_{OI}F \text{ ou bien } V\Sigma F \cos \widehat{FV} + \omega\Sigma M_{OI}F.$$

Si l'on considère maintenant que les composantes de la force totale $m\overline{J}$ au point du corps de masse m, sont :

$$m\frac{d^2x}{dt^2}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2},$$

et que par suite la somme des puissances virtuelles des forces totales, dans le même mouvement du corps solide devient :

$$\Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\frac{\delta x}{\delta t} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\delta y}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\delta z}{dt}\right) = V\Sigma mJ \cos \widehat{JV} + \omega\Sigma M_{OI}mJ.$$

l'équation VI du n° 202 s'écrit :

$$V\Sigma F \cos \widehat{FV} + \omega\Sigma M_{0I}F = V\Sigma mJ \cos \widehat{JV} + \omega\Sigma M_{0I}mJ,$$

ou bien encore :

$$V(\Sigma F \cos \widehat{FV} - \Sigma mJ \cos \widehat{JV}) + \omega(\Sigma M_{0I}F - \Sigma M_{0I}mJ) = 0.$$

Mais V et ω sont arbitraires, puisqu'une infinité de mouvements sont compatibles avec la solidité du corps, et l'équation précédente entraîne les deux relations :

$$\Sigma F \cos \widehat{FV} - \Sigma mJ \cos \widehat{JV} = 0, \quad \Sigma M_{0I}F - \Sigma M_{0I}mJ = 0,$$

c'est-à-dire :

$$(1)\ \Sigma F \cos \widehat{FV} = \Sigma mJ \cos \widehat{JV}, \quad (2)\ \Sigma M_{0I}F = \Sigma M_{0I}mJ.$$

La première condition montre que la projection de la résultante de translation des forces directement appliquées sur un axe quelconque, est égale à la projection correspondante de la résultante de translation des forces totales ; d'où l'on tire :

$$(3)\quad \Sigma \overline{F} = \Sigma \overline{mJ}.$$

En vertu du n° 14 la seconde condition est équivalente à la relation :

$$(4)\quad \Sigma M_o\overline{F} = \Sigma M_o\overline{mJ},$$

puisque l'égalité (2) doit être vérifiée, quelle que soit la direction de l'axe passant par le point O.

Les deux équations géométriques (3) et (4) se traduisent d'ailleurs par ce seul énoncé : *Le moment résultant des forces directement appliquées au solide est égal au moment résultant des forces totales par rapport à tous les points de l'espace* (21).

Les équations (3) et (4) conviennent donc à l'origine des axes rectangulaires de coordonnées. Elles se remplacent dès lors par les six équations de projections indiquées au n° 27, savoir :

$$(1)\ \Sigma X = \Sigma m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad (4)\ \Sigma(Zy - Yz) = \Sigma m\left(\frac{d^2z}{dt^2}y - \frac{d^2y}{dt^2}z\right),$$

$$(2)\ \Sigma Y = \Sigma m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad (5)\ \Sigma(Xz - Zx) = \Sigma m\left(\frac{d^2x}{dt^2}z - \frac{d^2z}{dt^2}x\right),$$

$$(3)\ \Sigma Z = \Sigma m \frac{d^2z}{dt^2}, \quad (6)\ \Sigma(Yx - Xy) = \Sigma m\left(\frac{d^2y}{dt^2}x - \frac{d^2x}{dt^2}y\right).$$

Ce sont les équations du mouvement du corps solide libre. Les trois premières résultent de l'application du théorème de la quantité de mouvement totale et les trois dernières du théorème des moments.

Leur existence pouvait se prévoir, car l'invariabilité des distances entre les n points du système ne donnait que $3n - 6$ équations, tandis que la détermination des coordonnées en demande $3n$. On aurait pu écrire ces équations à priori, en considérant la solidité du système comme due à des forces intérieures plutôt qu'à des liaisons ordinaires.

227. **Théorème.** — *Le point d'application d'une force appliquée à un solide entièrement libre, peut être transporté en un autre point du corps pris sur sa direction, sans amener de modification dans le mouvement du système matériel.*

En effet, le changement de point d'application ne modifie ni $\Sigma\overline{F}$, ni $\Sigma\overline{M}_o F$; les équations du mouvement restent donc les mêmes. Mais si l'on considère un corps naturel et par conséquent déformable, le transport d'une force en un point de sa direction, produit une répartition toute différente des forces intérieures au système. La figure de celui-ci change, et ce n'est qu'au point de vue extérieur que le théorème précédent est applicable.

§ 2. *Équations d'équilibre du corps solide libre*

228. Le solide étant en équilibre, les accélérations et les forces totales sont nulles ; les équations (3) et (4) du n° 226 deviennent donc :

$$\Sigma\overline{F} = 0, \quad \Sigma\overline{M_o F} = 0,$$

c'est-à-dire que le moment résultant des forces directement appliquées est nul par rapport à tous les points de l'espace (21). Il s'ensuit que si L, M, N, sont les moments d'une force directement appliquée par rapport aux axes rectangulaires de coordonnées, nous aurons les six équations très importantes :

$$(1)\ \Sigma X = 0, \quad (2)\ \Sigma Y = 0, \quad (3)\ \Sigma Z = 0,$$
$$(4)\ \Sigma L = 0, \quad (5)\ \Sigma M = 0, \quad (6)\ \Sigma N = 0.$$

Elles sont déduites du n° 226, en annulant les seconds membres des équations du mouvement.

229. Cas particuliers. — a) *Les forces directement appliquées sont dans un plan.*

Prenons le plan des forces pour plan des XY ; ΣZ, ΣL, ΣM, sont nécessairement nuls et il reste les trois équations d'équilibre :

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma N = 0.$$

b) *Le corps solide libre est soumis à l'action de deux forces directement appliquées.*

Soient $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, ces forces. L'équation $\Sigma\overline{F} = 0$ devient $\overline{F}_1 = -\overline{F}_2$; de plus la condition $\Sigma\overline{M_oF} = 0$, prouve que ces forces sont directement opposées, car le point O étant pris sur le prolongement de $\overline{F}_1$, on a $\overline{M_oF_1} = 0$. L'équation des moments se réduit donc à $\overline{M_oF_2} = 0$; ce qui donne $F_2 \times d = 0$, (*Fig.* 84) ou $d = 0$.

Fig. 84.

c) *Le corps solide libre est soumis à l'action de trois forces directement appliquées,* $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$. (*fig.* 85).

La condition $\Sigma\overline{M_oF} = 0$, doit être vérifiée, quelle que soit la position du point O ; donc aussi lorsqu'il est sur le prolongement de la force $\overline{F}_1$. Dans cè cas :

Fig. 85.

$$\overline{M_oF_2} = -\overline{M_oF_3}.$$

On en conclut que $\overline{M_oF_2}$, $\overline{M_oF_3}$ ont même direction et que les forces $\overline{F}_3$, $\overline{F}_2$ sont dans un même plan avec le point O. Celui-ci étant quelconque sur la direction de $\overline{F}_1$, cette force est dans le plan des deux autres et l'une d'elles, $\overline{F}_2$ par exemple, rencontre la direction de $\overline{F}_1$ au point O, que nous prenons pour point d'application (227). Or les forces $\overline{F}_1$ et $\overline{F}_2$ de même origine O, ont une résultante $\overline{R}$, car cette substitution n'altère ni $\Sigma\overline{F}$ ni $\Sigma\overline{M_oF}$. On peut donc considérer le solide comme soumis aux deux forces $\overline{R}$ et $\overline{F}_3$; l'équilibre exige qu'elles soient égales et directement opposées.

En conséquence, pour qu'un solide soumis à l'action de trois forces soit en équilibre, ***il faut qu'elles soient dans un même plan et que l'une d'elles soit égale et directement opposée à la résultante des deux autres.***

230. Remarque. — Les conditions d'équilibre du système matériel invariable ne sont plus suffisantes pour l'équilibre d'un solide naturel et par conséquent déformable.

Elles ne concernent que l'équilibre extérieur et ne tiennent pas compte de l'équilibre entre les forces intérieures. Pour le prouver, considérons un corps solide en équilibre à l'état naturel, c'est-à-dire lorsqu'aucune force extérieure ne lui est appliquée. Chacun des points qui le composent, est en équilibre sous l'action des forces moléculaires développées par les autres points. Dans cet état le corps est soumis à l'action d'un système de forces extérieures satisfaisant aux conditions de l'équilibre. Elles détruisent cependant l'équilibre primitif intérieur ; les points se déplacent et viennent occuper d'autres positions pour lesquelles la résultante des forces moléculaires développées sur chacun d'eux, fait équilibre à la force extérieure qui lui est appliquée.

Par suite des actions réciproques des molécules, la déformation, ordinairement très faible, s'étend à tout le corps, et lorsque l'équilibre intérieur est obtenu, la figure du système matériel est changée. Les relations analytiques qui traduisent cette déformation sont jointes aux équations d'équilibre extérieur, et déterminent l'état du corps.

Pour la sécurité des constructions, les déformations doivent rester dans certaines limites. Considérons, par exemple, une barre soumise à deux forces égales et directement opposées, l'équilibre extérieur existe, mais il est évident qu'il y aura fatalement rupture, si l'on augmente progressivement l'intensité des forces.

§ 3. *Réduction des forces appliquées à un corps solide libre*

231. Définition. — *Deux systèmes de forces appliqués à un corps solide libre sont dits équivalents, quand ils impriment aux points du corps les mêmes accélérations, de telle sorte que l'un de ces systèmes peut être substitué à l'autre au point de vue du mouvement.*

Théorème. — *Deux systèmes de forces sont équivalents s'ils ont les mêmes moments résultants, quel que soit le point de l'espace par rapport auquel on les établit.*

Soient $\overline{F}$ et $\overline{F}'$ une force de chacun des systèmes ; la condition imposée par le théorème, équivaut aux deux équations :

$$\Sigma\overline{F} = \Sigma\overline{F}', \quad \Sigma\overline{M_oF} = \Sigma\overline{M_oF}',$$

ou bien aux six équations analytiques (27) :

$$\begin{array}{llll} (1) & \Sigma X = \Sigma X', & (4) & \Sigma (Zy - Yz) = \Sigma (Z'y' - Y'z'), \\ (2) & \Sigma Y = \Sigma Y', & (5) & \Sigma (Xz - Zx) = \Sigma (X'z' - Z'x'), \\ (3) & \Sigma Z = \Sigma Z', & (6) & \Sigma (Yx - Xy) = \Sigma (Y'x' - X'y). \end{array}$$

Les équations du mouvement (226) sont donc identiques et les accélérations communiquées aux points du corps sont les mêmes.

Il résulte de ce théorème important, que les systèmes de forces appliqués aux solides, possèdent toutes les propriétés des systèmes de vecteurs.

232. **Des couples de forces.** — *Un couple de forces est un système de deux forces égales, parallèles, de sens contraires, mais non directement opposées, appliqué à un corps solide.*

Ses propriétés, déduites des nos 20, 21, 23 sont les suivantes :

a) *Un couple de forces est irréductible et ne peut se remplacer par une force.*

b) *Deux couples de forces qui ont les axes égaux sont équivalents.* De là ce théorème très important : *Un couple de forces peut être transporté et orienté d'une façon quelconque dans son plan ou dans tout autre plan parallèle, en prenant à volonté l'intensité de la force et la grandeur du bras de levier, pourvu que le moment ne varie pas.*

c) *Un système de couples de forces est équivalent au couple unique, dont l'axe est résultant des axes des couples donnés.*

233. La théorie des couples de forces donne le moyen d'opérer la réduction des forces appliquées au corps solide, en partant d'un théorème démontré au no 26, que nous rappelons comme suit :

Une force appliquée en un point d'un solide libre peut être transportée en un point quelconque de celui-ci, à condition de lui adjoindre un couple de forces, tel que son axe soit le moment de la force transportée par rapport au nouveau point d'application.

Donc un système quelconque de forces appliqué à un solide libre est équivalent à une infinité de systèmes différents, formés d'une résultante de translation et d'un couple de transport, ou de deux forces, dont l'une passe par un point déterminé et peut avoir une direction fixée d'avance.

La résultante de translation est indépendante du point choisi pour y transporter les forces ; elle est égale à leur somme géométrique, tandis que le couple de transport varie avec ce point, appelé *centre de réduction.*

Il est démontré au nº 28 qu'on peut choisir le centre de réduction de manière à obtenir l'axe du couple de transport parallèle à la résultante de translation. Nous trouvons ainsi l'axe central des couples, et ses propriétés sont connues.

234. Expression analytique de la résultante de translation et du couple de transport. — En vertu du nº 27 les projections de la résultante de translation et de l'axe du couple de transport sur les axes rectangulaires de coordonnées sont respectivement :

$$\Sigma X, \quad \Sigma Y, \quad \Sigma Z, \quad \text{et} \quad \Sigma L, \quad \Sigma M, \quad \Sigma N.$$

235. Condition pour qu'un système de forces se réduise à une résultante unique équivalente. — Théorème. — *Un système de forces se réduit à une force équivalente quand la résultante de translation est perpendiculaire à l'axe du couple de transport, pour un centre de réduction quelconque.*

Ce théorème, démontré au nº 29, suppose la résultante de translation différente de zéro. Il est traduit analytiquement par la relation connue :

$$\Sigma X \Sigma L + \Sigma Y \Sigma M + \Sigma Z \Sigma N = 0,$$

dans laquelle ΣX, ΣY, ΣZ ne sont pas simultanément nuls, ce qui exclut le cas du couple. La condition d'existence d'une résultante unique est alors nécessairement vérifiée, lorsque les forces sont parallèles ou situées dans un même plan. Établissons maintenant directement le théorème précédent.

Soient $\bar{R}$ la force unique équivalente, R_x, R_y, R_z, ses projections sur trois axes rectangulaires ; x_1, y_1, z_1 les coordonnées du point d'application. En vertu de l'équivalence il vient (231) :

$$\begin{array}{llll}(1) & R_x = \Sigma X, & (4) & R_z y_1 - R_y z_1 = \Sigma L,\\ (2) & R_y = \Sigma Y, & (5) & R_x z_1 - R_z x_1 = \Sigma M,\\ (3) & R_z = \Sigma Z, & (6) & R_y x_1 - R_x y_1 = \Sigma N.\end{array}$$

Les trois premières équations donnent R en grandeur, sens et direction. Les trois dernières déterminent les coordonnées x_1, y_1, z_1, du point d'application. En réalité elles sont insuffisantes, car elles se réduisent à deux équations en x_1, y_1, z_1 et à une troisième relation indépendante de ces coordonnées. Nous le prouvons en multipliant les équations (4), (5), (6) respectivement par ΣX, ΣY, ΣZ, puis en les ajoutant membre à membre, ce qui donne après réduction :

$$\Sigma X \Sigma L + \Sigma Y \Sigma M + \Sigma Z \Sigma N = 0.$$

Les coordonnées x_1, y_1, z_1, sont donc indéterminées et tous les points de la droite représentée par les deux équations en x_1, y_1, z_1, considérées comme coordonnées courantes, répondent à la question. Elle est parallèle à la résultante et on lui donne le nom de *ligne d'action* de la force.

236. Résultante d'un système de forces parallèles appliqué à un solide. — Les forces parallèles seront rangées en deux catégories, basées sur le sens qu'elles possèdent. Soient α, β, γ les angles directeurs qui définissent la première; $180^\circ - \alpha$, $180^\circ - \beta$, $180^\circ - \gamma$, seront ceux de la seconde. Il existe une résultante unique équivalente lorsque ΣX, ΣY, ΣZ ne sont pas simultanément nuls. Dans cette hypothèse, soient $\bar{R}$ cette force ; A, B, C, ses angles directeurs ; x_1, y_1, z_1, les coordonnées de son point d'application. Les six équations d'équivalence du n° 235 deviennent :

$$\begin{array}{ll}(1) & R \cos A = \cos \alpha \Sigma F,\\ (2) & R \cos B = \cos \beta \Sigma F,\\ (3) & R \cos C = \cos \gamma \Sigma F,\\ (4) & R \cos C . y_1 - R \cos B . z_1 = \cos \gamma \Sigma F y - \cos \beta \Sigma F z,\\ (5) & R \cos A . z_1 - R \cos C . x_1 = \cos \alpha \Sigma F z - \cos \gamma \Sigma F x,\\ (6) & R \cos B . x_1 - R \cos A . y_1 = \cos \beta \Sigma F x - \cos \alpha \Sigma F y.\end{array}$$

Cos α, cos β, cos γ, y sont mis en facteurs, à la condition de considérer positivement les forces de la première catégorie, négative-

ment celles de la seconde ; par conséquent ΣF est une somme algébrique et on tire des trois premières équations :

$$R = \pm \Sigma F, \quad \cos A = \frac{\cos \alpha \Sigma F}{R} = \pm \cos \alpha,$$
$$\cos B = \pm \cos \beta, \quad \cos C = \pm \cos \gamma.$$

Bien que tout soit déterminé, nous plaçons le double signe dans ces formules, parce que la valeur absolue de la résultante est nécessairement positive, tandis qu'il n'en est pas ainsi pour la somme algébrique ΣF, considérée dans les trois premières équations. Elle est positive ou négative, selon que la somme des forces de la première catégorie est plus grande ou plus petite que la somme des forces de sens opposé. Le même signe entre donc dans les quatre formules.

En tenant compte de ces résultats, les équations (4), (5), (6) donnent :

$$\cos \gamma (\Sigma F y - y_1 \Sigma F) - \cos \beta (\Sigma F z - z_1 \Sigma F) = 0,$$
$$\cos \alpha (\Sigma F z - z_1 \Sigma F) - \cos \gamma (\Sigma F x - x_1 \Sigma F) = 0,$$
$$\cos \beta (\Sigma F x - x_1 \Sigma F) - \cos \alpha (\Sigma F y - y_1 \Sigma F) = 0,$$

ou bien :

$$\text{(I)} \quad \frac{\Sigma F x - x_1 \Sigma F}{\cos \alpha} = \frac{\Sigma F y - y_1 \Sigma F}{\cos \beta} = \frac{\Sigma F z - z_1 \Sigma F}{\cos \gamma}.$$

Si x_1, y_1, z_1, sont considérées comme coordonnées courantes, ces équations déterminent la ligne d'action de la résultante. Elle est parallèle à la direction commune des forces. Tous ses points peuvent être pris pour points d'application, mais au seul point de vue de l'équilibre extérieur.

L'un d'eux est remarquable, en ce sens que la résultante ne cesse pas d'y passer, si l'on change la direction commune des forces sans modifier leurs points d'application, leurs sens et les rapports entre leurs intensités.

En effet, quels que soient les angles α, β, γ, les équations (I) sont vérifiées en posant :

$$\Sigma F x - x_1 \Sigma F = 0, \quad \Sigma F y - y_1 \Sigma F = 0, \quad \Sigma F z - z_1 \Sigma F = 0,$$

d'où :

$$\text{(II)} \quad x_1 = \frac{\Sigma F x}{\Sigma F}, \quad y_1 = \frac{\Sigma F y}{\Sigma F}, \quad z_1 = \frac{\Sigma F z}{\Sigma F}.$$

Ce point, appelé *centre des forces parallèles*, est pris généralement pour point d'application de la résultante.

En résumé : *Tout système de forces parallèles appliqué à un corps solide, et pour lequel la somme algébrique des forces n'est pas nulle, est équivalent à une force unique, parallèle aux composantes, égale à leur somme algébrique et qui passe par le centre des forces parallèles. Ce point bien déterminé est indépendant de la direction commune des forces et de leurs grandeurs, pourvu qu'elles conservent entre elles les mêmes rapports, mais il dépend des points d'application, choisis sur les directions des composantes appliquées au solide.*

237. **Cas particuliers.** — Deux forces parallèles et de même sens ont une résultante parallèle, de même sens, et de position telle que sa direction divise leur plus courte distance en deux segments inversement proportionnels aux forces.

Deux forces parallèles et de sens contraires, ont une résultante parallèle, de même sens que la plus grande, égale à leur différence et de position telle que sa direction détermine sur la plus courte distance prolongée du côté de la plus grande des deux forces, deux segments inversement proportionnels aux forces (nº 31).

238. **Définition.** — *On appelle moment d'une force par rapport à un plan, le produit de son intensité par la distance de son point d'application au plan.*

Cette distance est supposée positive d'un côté du plan et négative de l'autre. En partant de cette définition, les relations du centre des forces parallèles (236) s'énoncent comme suit :

Le moment de la résultante d'un système de forces parallèles par rapport à un plan quelconque, est égal à la somme des moments des forces par rapport au même plan.

CHAPITRE XXIII

DE LA PESANTEUR ET DU CENTRE DE GRAVITÉ

239. La pesanteur est la force naturelle qui agit sur tous les points de notre globe et provoque leur chute suivant la verticale, lorsqu'ils sont abandonnés à eux-mêmes. Son intensité et sa

direction dépendent de la position du point à la surface de la terre; mais dans les limites des systèmes matériels dont on s'occupe en pratique, on peut regarder cette force comme constante. L'accélération qu'elle imprime au point matériel soumis à son action est représentée par g, qui vaut à Bruxelles 9^m811.

De ces considérations résulte la définition du corps pesant : c'est un système matériel soumis, en chacun de ses points, à l'action d'une force verticale, dite le poids du point et qui est mesurée par le produit de la masse de celui-ci par l'accélération supposée constante g.

Toutes ces forces parallèles et de même sens, ont une résultante égale à leur somme arithmétique, et qui est appelée le *poids du corps*. Le centre des forces parallèles correspondant prend le nom de *centre de gravité*. Sa détermination expérimentale appartient au cours de physique ; sa recherche analytique se fait au moyen des formules du n° 236.

Soient p le poids d'un point, x, y, z, ses coordonnées, P le poids total du corps ; on a :

$$x_1 = \frac{\Sigma px}{P}, \quad y_1 = \frac{\Sigma py}{P}, \quad z_1 = \frac{\Sigma pz}{P}.$$

Or :

$$p = mg, \quad P = \Sigma mg = g\Sigma m = gM,$$

par conséquent :

$$x_1 = \frac{\Sigma mx}{M}, \quad y_1 = \frac{\Sigma my}{M}, \quad z_1 = \frac{\Sigma mz}{M}.$$

Ce sont les formules par lesquelles nous avions défini *a priori* le centre de gravité au n° 210. En étendant aux masses la définition des moments par rapport à un plan, on conclut que le centre de gravité *est le point où il faudrait condenser la masse totale du corps, pour que son moment par rapport à un plan quelconque, soit la somme des moments des masses de ses différents points par rapport au même plan.*

Le centre de gravité défini de cette façon, prend le nom de *centre d'inertie*. Bour fait remarquer que les coordonnées qui le déterminent sont indépendantes de la pesanteur. Ce point existe toujours et ne devient le point d'application de la résultante des actions de la pesanteur, que si le système est suffisamment petit.

Lorsque ce dernier ne constitue pas un corps solide, à chacune des figures qu'il prend, correspond une position nouvelle du centre de gravité.

240. La recherche de ce point, basée sur les équations caractéristiques (II) du n° **236**, suppose les points du corps, leurs masses et leurs positions relatives, déterminés rigoureusement. Comme cela n'est pas, nous substituerons au corps un système idéal possédant les mêmes propriétés pratiques, mais qui évite les inconnues citées et permet l'emploi de l'analyse. La matière sera supposée répartie d'une manière continue dans le volume du corps, d'après une loi qui représente la distribution des masses dans le corps réel.

Soient ΔV un volume déterminé de celui-ci, ΔP son poids, ΔM sa masse. Les rapports $\frac{\Delta M}{\Delta V}$, $\frac{\Delta P}{\Delta V}$, sont dits la densité et le poids spécifique moyens du volume ΔV. *La densité et le poids spécifique du corps matériel en un point, sont les limites de la densité et du poids spécifique moyens d'un volume variable renfermant ce point et convergeant vers celui-ci.* Si nous les désignons par ρ et ϖ, il vient :

$$\rho = \frac{dm}{dv}, \quad \varpi = \frac{dp}{dv}.$$

Ce sont des fonctions continues des coordonnées du point du corps auquel elles se rapportent. On les définit encore, comme *représentant la densité et le poids de ce point, rapportés à l'unité de volume.*

Le corps est dit *homogène* quand sa densité est constante. Il est *hétérogène* dans les autres hypothèses.

Si nous adoptons la fiction de la continuité de la matière, les équations du centre de gravité s'écrivent :

$$x_1 = \frac{\int \rho x dv}{\int \rho dv}, \quad y_1 = \frac{\int \rho y dv}{\int \rho dv}, \quad z_1 = \frac{\int \rho z dv}{\int \rho dv}.$$

Lorsque le système est homogène, la densité est constante et les formules précédentes deviennent :

$$x_1 = \frac{\int x dv}{\int dv}, \quad y_1 = \frac{\int y dv}{\int dv}, \quad z_1 = \frac{\int z dv}{\int dv}.$$

Remarque. — On est souvent amené à considérer le centre de gravité d'une surface ou d'une ligne, et pour cela, on imagine la matière répartie sur la surface ou la ligne, d'après une loi connue.

241. **Recherche du centre de gravité dans quelques cas particuliers.** — Des équations du centre de gravité, on déduit certaines remarques qui facilitent sa recherche dans un grand nombre de cas.

1° Le centre de gravité d'un volume ou d'une surface homogène possédant un plan diamétral, se trouve dans celui-ci;

2° Le centre de gravité d'un volume ou d'une surface homogène possédant un axe de symétrie, est sur cette droite;

3° Le centre de gravité d'un volume ou d'une surface homogène ayant un centre se confond avec lui.

De là les cónséquences suivantes :

1° Le centre de gravité d'une droite est en son milieu;

2° Le centre de gravité d'une circonférence, d'un cercle, d'une ellipse, d'un polygone régulier, d'une sphère, d'un ellipsoïde, d'un polyèdre régulier est au centre;

3° Le centre de gravité d'un rectangle, d'un parallélogramme, d'un parallélépipède est à l'intersection des diagonales;

4° Le centre de gravité d'un triangle est au point de rencontre des médianes; par suite, le centre de gravité d'un polygone s'obtient en décomposant cette surface en triangles et en appliquant au centre de gravité de chacun d'eux, un poids proportionnel à l'aire de celui-ci;

5° Le centre de gravité d'un tétraèdre est sur la droite qui joint un sommet au centre de gravité de la face opposée et aux $\frac{3}{4}$ de cette droite à partir du sommet. On en conclut que le centre de gravité d'une pyramide à base polygonale plane, est sur la droite qui joint le sommet au centre de gravité de la base et aux $\frac{3}{4}$ de cette droite à partir du sommet. Ce résultat s'applique aux cônes;

6° Le centre de gravité d'un prisme est au milieu de la droite qui joint les centres de gravité des deux bases parallèles. De même pour les cylindres.

242. **Centre de gravité d'une ligne homogène.** — Soit l la longueur rectifiée de l'arc de courbe, on a :

$$x_1 = \frac{\int x dl}{l}, \qquad y_1 = \frac{\int y dl}{l}, \qquad z_1 = \frac{\int z dl}{l};$$

or :

$$\frac{dl}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

donc en prenant x comme variable indépendante il vient :

$$x_1 = \frac{\int_{x_0}^{x_1} x dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{l},$$

$$y_1 = \frac{\int_{x_0}^{x_1} y dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{l},$$

$$z_1 = \frac{\int_{x_0}^{x_1} z dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}}{l}.$$

Dans ces formules y, z, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$, sont déterminées en fonction de x par les deux équations de la courbe. Les limites d'intégration sont les abscisses des extrémités de l'arc donné.

Si celui-ci est dans un plan, que nous prenons pour plan des XY, les formules se simplifient et il vient :

$$x_1 = \frac{\int_{x_0}^{x_1} x dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{l}, \qquad y_1 = \frac{\int_{x_0}^{x_1} y dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{l}.$$

243. Applications. — a) *On donne un arc d'hélice par ses équations en coordonnées rectangulaires :*

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = \mathrm{K} \arccos \frac{x}{a},$$

et par les coordonnées (a.o.o.), (x,y,z) *des extrémités. On demande le centre de gravité.*

Appliquons les formules du n° 242, nous avons :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{-\mathrm{K}}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \frac{dl}{dx} = \sqrt{\frac{a^2 + \mathrm{K}^2}{a^2 - x^2}}, \quad y = \sqrt{a^2 - x^2},$$

$$x_1 = \frac{\int_a^x x dx \sqrt{\frac{a^2 + \mathrm{K}^2}{a^2 - x^2}}}{\int_a^x dx \sqrt{\frac{a^2 + \mathrm{K}^2}{a^2 - x^2}}} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{\arccos \frac{x}{a}} = \frac{\mathrm{K}y}{z}.$$

On trouverait de même :

$$y_1 = \frac{K(a - x)}{z}, \quad z_1 = \frac{z}{2}.$$

b) *On donne un arc de cercle et ses extrémités. On demande le centre de gravité.*

En vertu de ce qui est dit au nº 241, le centre de gravité est sur la bissectrice de l'angle au centre qui soustend l'arc considéré, puisque cette droite est un axe de symétrie. En la prenant pour axe des x, il suffit donc de déterminer x_1.

Soient α_1, $-\alpha_1$, α, les angles qui définissent les extrémités B et A ainsi qu'un point quelconque M de l'arc, a le rayon du cercle (*Fig.* 86). Si l'on choisit α pour variable indépendante, on a :

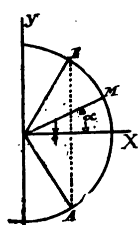


Fig. 86.

$$l = a\alpha, \quad x = a\cos\alpha, \quad \frac{dl}{d\alpha} = a,$$

$$x_1 = \frac{\int_{-\alpha_1}^{+\alpha_1} a^2 \cos\alpha \, d\alpha}{l} = \frac{2a^2 \sin\alpha_1}{2a\alpha_1} = \frac{ac}{l},$$

c et l désignant la corde et la longueur de l'arc.

Le centre de gravité est donc situé sur le rayon passant par le milieu de l'arc et à une distance du centre qui est une quatrième proportionnelle à l'arc, au rayon et à la corde.

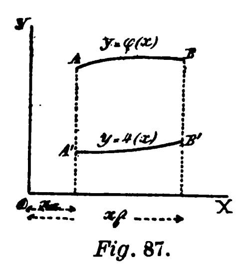


Fig. 87.

244. Centre de gravité d'une surface plane. — Soit d'une manière générale à trouver le centre de gravité de la surface AB A'B' comprise entre les ordonnées correspondantes aux abscisses x_a, x_b et les deux courbes dont les équations sont $Y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$. (*Fig.* 87)

Le calcul intégral donne :

$$x_1 = \frac{\int_{x_a}^{x_b} x(Y - y)\,dx}{\int_{x_a}^{x_b} (Y - y)\,dx}, \quad y_1 = \frac{\int_{x_a}^{x_b} \left(\frac{Y^2 - y^2}{2}\right) dx}{\int_{x_a}^{x_b} (Y - y)\,dx}.$$

245. Centre de gravité d'une surface courbe homogène. — Soit $f(x,y,z) = 0$, l'équation de la surface rapportée à trois axes

rectangulaires. Il faut rechercher le centre de gravité de la partie S déterminée par la projection de son contour sur l'un des plans des coordonnées. Or le plan tangent en un point de la surface fait avec le plan des XY un angle ν mesuré par l'angle de la normale en ce point avec OZ, et l'on a :

$$\cos \nu = \frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

expression dans laquelle :

$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy},$$

dès lors les formules du nº 240 deviennent, comme il est dit dans le cours d'analyse, et en conservant les notations du nº 244 :

$$x_1 = \frac{\int_{x_a}^{x_b} xdx \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} \sqrt{1+p^2+q^2}\, dy}{S},$$

$$y_1 = \frac{\int_{x_a}^{x_b} dx \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} y \sqrt{1+p^2+q^2}\, dy}{S},$$

$$z_1 = \frac{\int_{x_a}^{x_b} dx \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} z \sqrt{1+p^2+q^2}\, dy}{S}.$$

$z, p, q,$ sont des fonctions de x et de y déduites de l'équation de la surface et les limites d'intégration résultent du contour de la projection sur le plan des XY, comme au numéro précédent.

246. Applications. — *Déterminer le centre de gravité de l'aire du cône*

$$y^2 + z^2 = \beta^2 x^2,$$

comprise entre les plans des XZ, *des* XY *et le plan* x = d (*Fig.* 88).

Appliquons les formules du nº 245. On tire de l'équation du cône :

$$p = \beta^2 \frac{x}{z}, \quad q = \frac{-y}{z},$$

$$\sqrt{1+p^2+q^2} = \frac{\beta x \sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{\beta^2 x^2 - y^2}},$$

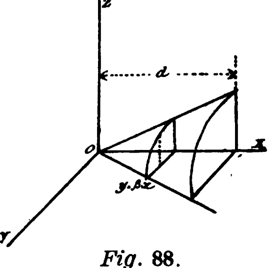


Fig. 88.

et par suite :

$$x_1 = \frac{\int_0^d \beta x^2 \sqrt{1+\beta^2}\, dx \int_0^{\beta x} \frac{dy}{\sqrt{\beta^2 x^2 - y^2}}}{\int_0^d \beta x \sqrt{1+\beta^2}\, dx \int_0^{\beta x} \frac{dy}{\sqrt{\beta^2 x^2 - y^2}}} = \frac{\int_0^d x^2 \left(\text{arc sin} \frac{y}{\beta x}\right)_0^{\beta x} dx}{\int_0^d x \left(\text{arc sin} \frac{y}{\beta x}\right)_0^{\beta x} dx} = \frac{2d}{3}.$$

Or la surface est homogène, donc le plan bissecteur du dièdre OX, qui est un plan de symétrie, contient le centre de gravité, par suite $y_1 = z_1$, et on trouve :

$$y_1 = \frac{\int_0^d dx \int_0^{\beta x} ydy \sqrt{1+p^2+q^2}}{\int_0^d dx \int_0^{\beta x} dy \sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{\int_0^d xdx \int_0^{\beta x} \frac{ydy}{\sqrt{\beta^2 x^2 - y^2}}}{\int_0^d xdx \int_0^{\beta x} \frac{dy}{\sqrt{\beta^2 x^2 - y^2}}} = \frac{4d\beta}{3\pi}.$$

Soient $z^2 + y^2 = 121x^2$, $d = 12^m$, le mètre étant pris pour unité; il vient $x_1 = 8^m$, $y_1 = z_1 = 56^m$.

247. Centre de gravité d'un secteur circulaire (*Fig.* 89). — Le centre de gravité est sur la bissectrice OX de l'angle au centre du secteur et il suffit de déterminer x_1. Le secteur est engendré par l'arc de circonférence MN dont le rayon varie de o à a. Or nous avons trouvé pour l'arc MN :

$$\int_o^a xdl = 2r^2 \sin \alpha_1 \text{ (243)},$$

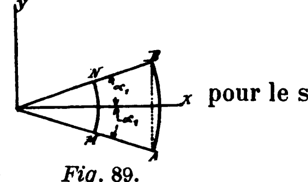


Fig. 89.

pour le secteur tout entier nous aurons donc :

$$\int_o^a 2r^2 \sin \alpha_1 dr = \frac{2}{3} a^3 \sin \alpha_1,$$

et par conséquent :

$$x_1 = \frac{\frac{2}{3} a^3 \sin \alpha_1}{\frac{1}{2} a^2 \alpha_1} = \frac{\frac{2}{3} a . \text{corde AB}}{\text{arc AB}}.$$

248. Centre de gravité d'un volume homogène. — Soit V le volume du corps. Les coordonnées du centre de gravité sont :

$$x_1 = \frac{\int_3 xdxdydz}{V}, \quad y_1 = \frac{\int_3 ydxdydz}{V}, \quad z_1 = \frac{\int_3 zdxdydz}{V},$$

dans lesquelles on détermine les limites d'intégration comme il est indiqué dans les cours d'analyse.

249. Application. — *On demande le centre de gravité du solide compris entre la surface de la sphère*

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

et les plans des XY, YZ, ZX (*Fig.* 90).

Les formules du nº 248 donnent :

$$x_1 = \frac{\int_0^a xdx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dy \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dz}{\frac{1}{6}\pi a^3} = \frac{3a}{8}.$$

Par suite de la symétrie, le centre de gravité est sur l'intersection des plans bissecteurs des dièdres OX, OY, OZ ; donc :

$$x_1 = y_1 = z_1 = \frac{3a}{8}.$$

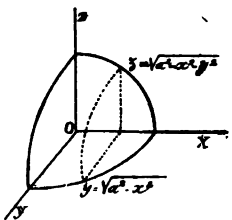


Fig. 90.

La même méthode donne les coordonnées du centre de gravité de la huitième partie de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

ce sont : $x_1 = \frac{3a}{8}$, $y_1 = \frac{3b}{8}$, $z_1 = \frac{3c}{8}$.

Application. — Rechercher le centre de gravité de la portion de cône définie au nº 246.

On trouvera : $x_1 = \frac{3d}{4}$, $y_1 = z_1 = \frac{\beta d}{2\pi}$.

250. Centre de gravité des surfaces et des volumes de révolution homogènes. — L'aire de révolution engendrée par la courbe plane $y = f(x)$, qui tourne autour de OX (*Fig.* 91) a son centre de gravité sur cette droite. Ce point se détermine par la formule :

$$x_1 = \frac{2\pi \int xydl}{2\pi \int ydl} = \frac{\int_{x_a}^{x_b} xy \frac{dl}{dx} dx}{\int_{x_a}^{x_b} y \frac{dl}{dx} dx}.$$

Fig. 91.

De même le volume de révolution engendré par l'aire plane

ABA'B' (*Fig.* 87) située dans le plan des XY et qui tourne autour de OX, a son centre de gravité sur cet axe. On l'obtient par la formule :

$$x_1 = \frac{\int_{x_a}^{x_b} \pi x\,(Y^2 - y^2)\,dx}{\int_{x_a}^{x_b} \pi\,(Y^2 - y^2)\,dx} = \frac{\int_{x_a}^{x_b} x\,(Y^2 - y^2)\,dx}{\int_{x_a}^{x_b} (Y^2 - y^2)\,dx}.$$

250. Application. — *On demande le centre de gravité d'une zone de la sphère*

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

comprise entre les plans $x = b$, $x = c$.

Il vient :

$$x_1 = \frac{\int_b^c xy\,\frac{dl}{dx}\,dx}{\int_b^c y\,\frac{dl}{dx}\,dx}.$$

Or la courbe génératrice est $x^2 + y^2 = a^2$; d'où :

$$\frac{dl}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{a}{y}, \quad x_1 = \frac{\int_b^c xdx}{\int_b^c dx} = \frac{c+b}{2}.$$

252. Théorèmes de Guldin. — 1° *L'aire engendrée par une ligne plane tournant autour d'un axe situé dans son plan est égale à la longueur de cette ligne, multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

Soit S l'aire de la surface de révolution engendrée par la ligne AB tournant autour de l'axe OX situé dans son plan (*Fig.* 91).

Le cours d'analyse donne la formule :

$$S = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} ydl,$$

d'autre part l'ordonnée du centre de gravité de la ligne AB est tirée de la relation :

$$y_1 = \frac{\int_{x_0}^{x_1} ydl}{l} \quad (242),$$

d'où : $S = 2\pi y_1 \times l$.

2° *Le volume engendré par une aire plane tournant autour d'un axe situé dans son plan est égal à l'aire génératrice, multipliée par la circonférence que décrit son centre de gravité.*

Soit V le volume de révolution produit par la rotation de la surface plane ABA'B' autour de l'axe OX situé dans son plan (*Fig.* 87). On a :

$$V = \pi \int (Y^2 - y^2)\, dx$$

mais s étant l'aire de la surface plane AA'BB' et y_1 l'ordonnée de son centre de gravité, il vient :

$$y_1 = \frac{\int_{x_a}^{x_b} \frac{(Y^2 - y^2)\, dx}{2}}{s} \quad (244),$$

d'où :

$$V = 2\pi y_1 s.$$

Application. — *Déterminer la surface et le volume du tore, engendré par la rotation d'un cercle autour de l'axe* OX, *situé dans son plan.*

Soient a le rayon du cercle, d la distance du centre à l'axe OX, nous avons par application des théorèmes de Guldin :

$$S = 2\pi d 2\pi a = 4\pi^2 ad,$$
$$V = 2\pi d \pi a^2 = 2\pi^2 a^2 d.$$

253. **Centre de gravité d'un corps non homogène.** — Dans un corps non homogène, la densité est fonction des coordonnées du point et doit rester sous le signe intégrale. Les coordonnées du centre de gravité sont donc :

$$x_1 = \frac{\int_3 \rho x dx dy dz}{\int \rho dv}, \quad y_1 = \frac{\int_3 \rho y dx dy dz}{\int \rho dv}, \quad z_1 = \frac{\int_3 \rho z dx dy dz}{\int \rho dv}.$$

Application. — *On donne un hémisphère matériel de rayon a, dont la densité en chaque point, est proportionnelle à la distance à la base. On demande le centre de gravité.*

Considérons la demi-sphère engendrée par la révolution autour de l'axe des x d'un quart de cercle dont l'équation est $y^2 + x^2 = a^2$. La densité en un point est représentée par kx et l'axe des x est un axe de symétrie géométrique et matérielle. Le centre de gravité

s'y trouve et se détermine par la formule du n° 250 mais à la condition de laisser ρ sous le signe intégrale.

Nous y ferons :

$$\rho = kx,\ Y^2 = a^2 - x^2,\ y = 0.$$

Il vient :

$$x_1 = \frac{\int \rho x (Y^2 - y^2)\, dx}{\int \rho (Y^2 - y^2)\, dx} = \frac{\int_0^a x^2 (a^2 - x^2)\, dx}{\int_0^a x (a^2 - x^2)\, dx} = \frac{4a}{15}.$$

254. Application de l'équation générale de la mécanique aux systèmes pesants. — Considérons un système matériel à liaisons, qui soit soumis aux seules actions de la pesanteur. Soient p le poids d'un point, z sa distance au plan horizontal de comparaison pris pour plan des XY, P le poids total. En considérant l'axe des z positivement dans le sens de la pesanteur, on a :

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = p,$$

et l'équation générale de la mécanique (202) devient :

$$\Sigma p \frac{\delta z}{\delta t} = \Sigma m \left(\frac{d^2x}{dt^2} \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{d^2y}{dt^2} \frac{\delta y}{\delta t} + \frac{d^2z}{dt^2} \frac{\delta z}{\delta t} \right),$$

or :

$$Pz_1 = \Sigma pz,$$

donc :

$$(1) \quad \Sigma p \frac{\delta z}{\delta t} = P \frac{\delta z_1}{\delta t} = \Sigma m \left(\frac{d^2x}{dt^2} \frac{\delta x}{\delta t} + \frac{d^2y}{dt^2} \frac{\delta y}{\delta t} + \frac{d^2z}{dt^2} \frac{\delta z}{\delta t} \right);$$

par conséquent, *dans un système matériel soumis aux seules actions de la pesanteur, la puissance du poids total appliqué au centre de gravité, est égale à la somme des puissances des forces totales pour tous les mouvements virtuels compatibles avec les liaisons.*

S'il y a équilibre, on a $P \frac{\delta z_1}{\delta t} = 0$ et par suite

$$(2) \quad \frac{\delta z_1}{\delta t} = 0.$$

Il en résulte qu'un corps pesant est en équilibre, lorsque la vitesse virtuelle du centre de gravité est horizontale, pour tous les mouvements virtuels compatibles avec les liaisons.

Si celles-ci obligent le centre de gravité à rester sur une courbe ou une surface, les positions d'équilibre sont situées aux points les plus hauts et les plus bas, pour lesquels les tangentes ou les plans tangents sont horizontaux. L'équilibre, stable dans les dernières positions, est instable dans les premières, parce que la fonction des forces, représentée ici par Mgz_1, passe par un maximum en même temps que z_1, c'est-à-dire aux points les plus bas.

Envisageons enfin, un système pesant où le centre de gravité reste dans un plan horizontal. La condition (2) est vérifiée quelle que soit la position du corps et l'équilibre est dit *indifférent*. Ex. : Une sphère homogène placée sur un plan horizontal.

CHAPITRE XXIV

THÉORIE DES MOMENTS D'INERTIE

255. *On appelle moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe, la somme des produits des masses de ses points par les carrés de leurs distances à l'axe.*

Si donc I est le moment d'inertie du corps, m la masse d'un de ses points, r sa distance à l'axe, on a :

$$I = \Sigma mr^2,$$

à condition d'étendre la somme à tous les points du système.

Cette expression, essentiellement positive, s'évalue en kilogrammètres, lorsque le mètre et le kilogramme sont pris pour unités.

On donne le nom de rayon de giration à la distance K *qui sépare l'axe du point où il faudrait ramener la masse totale du corps, pour avoir le même moment d'inertie.* Il se détermine par la formule :

$$I = MK^2.$$

Les moments d'inertie dépendent de la répartition de la matière dans le corps et de la position de celui-ci relativement à l'axe. Lorsqu'ils se rapportent à un même système matériel, ils sont liés par les théorèmes qui suivent.

256. Théorème. — *Le moment d'inertie d'un corps matériel par rapport à un axe quelconque, est égal au moment d'inertie*

par rapport à une parallèle menée par le centre de gravité, augmenté du moment d'inertie de la masse tout entière concentrée en ce point, par rapport à l'axe proposé (*Fig.* 92).

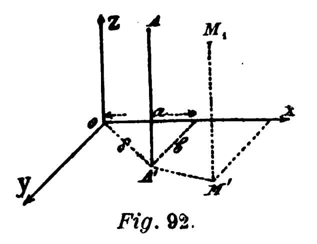


Fig. 92.

Considérons des axes rectangulaires OXYZ tels que OZ soit parallèle à l'axe donné AA'. Un point M_1 du corps se projette en M' sur le plan des XY; ses coordonnées sont x, y, z; sa plus courte distance à l'axe AA' est A'M'. Soient $A'M' = r'$, $OA' = \delta, a, b,$ les coordonnées de A'; nous aurons :

$$r'^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2,$$
$$I = \Sigma m \{ (x - a)^2 + (y - b)^2 \}$$
$$= \Sigma m (x^2 + y^2) - 2a\Sigma mx - 2b\Sigma my + (a^2 + b^2) \Sigma m.$$

Mais :

$$M = \Sigma m, \quad x_1 = \frac{\Sigma mx}{M}, \quad y_1 = \frac{\Sigma my}{M} \ (239),$$
$$a^2 + b^2 = \delta^2, \quad x^2 + y^2 = r^2,$$

et par suite :

$$I = \Sigma mr^2 + M\delta^2 - 2M (ax_1 + by_1).$$

Lorsque le centre de gravité est sur OZ, $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, l'équation se simplifie et on trouve

$$I = \Sigma mr^2 + M\delta^2.$$

Il en résulte que 1° le plus petit des moments d'inertie d'un corps par rapport à tous les axes parallèles, s'obtient lorsque l'axe passe par le centre de gravité. 2° les moments d'inertie du corps sont égaux, quand les axes parallèles sont menés à la même distance de ce point.

257. **Théorème.** — *Lorsqu'on porte sur les différentes droites issues d'une même origine, des longueurs inversement proportionnelles aux racines carrées des moments d'inertie correspondants d'un corps matériel, le lieu des extrémités est un ellipsoïde qui a pour centre l'origine* (*Fig.* 93).

Recherchons le moment d'inertie par rapport à la droite OI qu

fait avec les axes de coordonnées les angles α, β, γ. Soit r la plus courte distance d'un point du corps à cette droite ; nous avons :

$$r^2 = \overline{OM}^2 - \overline{OM'}^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(1 - \cos^2 \widehat{MOI}),$$
$$r^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma)$$
$$- (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2$$
$$r^2 = (y^2 + z^2) \cos^2 \alpha + (x^2 + z^2) \cos^2 \beta + (x^2 + y^2) \cos^2 \gamma$$
$$- 2yz \cos \beta \cos \gamma - 2xz \cos \alpha \cos \gamma - 2xy \cos \alpha \cos \beta.$$

Substituons ensuite à r^2 sa valeur dans Σmr^2, faisons sortir du signe Σ les cosinus communs à tous les points et posons :

$$A = \Sigma m (y^2 + z^2), \quad B = \Sigma m (x^2 + z^2), \quad C = \Sigma m (x^2 + y^2),$$
$$D = \Sigma myz, \quad E = \Sigma mxz, \quad F = \Sigma mxy \;;$$

il vient :

$$(1) \quad I = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma - 2D \cos \beta \cos \gamma$$
$$- 2E \cos \alpha \cos \gamma - 2F \cos \alpha \cos \beta.$$

Pour interpréter géométriquement cette relation, portons sur chaque droite une longueur OR, égale à $\frac{1}{\sqrt{I}}$. Les coordonnées du point R sont :

$$x = \frac{1}{\sqrt{I}} \cos \alpha, \quad y = \frac{1}{\sqrt{I}} \cos \beta,$$
$$z = \frac{1}{\sqrt{I}} \cos \gamma.$$

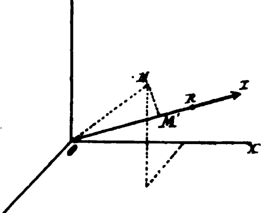


Fig. 93.

On tire de ces relations cos α, cos β, cos γ, et en les remplaçant dans (1), on trouve :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Exz - 2Fxy = 1.$$

Cette équation du second degré représente un ellipsoïde rapporté à son centre, puisque les rayons vecteurs sont nécessairement limités et que les termes du premier degré font défaut. Il est appelé *ellipsoïde d'inertie* du corps par rapport au point O.

Si l'on avait pris ses axes pour axes des coordonnées, son équation aurait été de la forme :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

Il est bien entendu que A, B, C, sont maintenant les moments d'inertie par rapport aux axes de l'ellipsoïde. Ils sont dits *moments d'inertie principaux* du corps relativement au point O. Par analogie les axes de la surface sont appelés axes principaux d'inertie du corps. Ils sont déterminés par les conditions :

$$D = 0, \quad E = 0, \quad F = 0.$$

L'ellipsoïde d'inertie, relativement au centre de gravité, prend le nom d'*ellipsoïde central.* Ses axes sont définis par les relations :

$$D = 0, E = 0, F = 0, \Sigma mx = 0, \Sigma my = 0, \Sigma mz = 0.$$

En particulier, l'axe OZ est déterminé par

$$D = 0, \quad E = 0, \quad \Sigma mx = 0, \quad \Sigma my = 0.$$

258. **Remarque.** — Du mode de construction de l'ellipsoïde on peut déduire les conclusions suivantes : 1° Le plus grand axe de la surface correspond au plus petit moment d'inertie et réciproquement. 2° Si deux moments d'inertie principaux A et B sont égaux, l'ellipsoïde devient de révolution autour du troisième axe principal d'inertie OZ. Dans cette hypothèse tous les diamètres du plan des XY sont des axes principaux et les moments d'inertie correspondants ont une valeur commune A ; les moments d'inertie relativement aux diamètres également inclinés sur l'axe de révolution sont égaux.

Enfin, lorsqu'un système matériel possède un plan de symétrie, celui-ci contient deux des axes principaux d'inertie du centre de gravité.

En effet, prenons ce plan pour plan des XY et le centre de gravité qui s'y trouve, pour l'origine des axes. Dès lors les conditions $D = 0$, $E = 0$ sont vérifiées, car à tout point du corps correspond un point symétrique, de mêmes masse, abscisse et ordonnée, mais dont le z est égal et de signe contraire. L'axe des z est donc principal d'inertie relativement au centre de gravité et le plan de symétrie contient les deux autres axes.

259. **Conditions auxquelles doit satisfaire un ellipsoïde pour être d'inertie.** — Soient A, B, C les moments d'inertie principaux d'un corps relativement à un point quelconque. Supposons $A < B < C$. On a, en même temps (n° 257) $A + B > C$,

car :

$$A + B - C = \Sigma m (y^2 + z^2) + \Sigma m (x^2 + z^2) - \Sigma m (x^2 + y^2)$$
$$= 2\Sigma m z^2.$$

Cette expression est essentiellement positive ; or si $2a$, $2b$, $2c$, sont les axes de l'ellipsoïde d'inertie, on a :

$$A = \frac{1}{a^2}, \quad B = \frac{1}{b^2}, \quad C = \frac{1}{c^2},$$

d'où la condition :

$$c > \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

260. Ellipse d'inertie. — Il arrive que les masses du système matériel soient supposées dans un plan où se trouve aussi le point relativement auquel on construit l'ellipsoïde d'inertie. On ne demande d'ailleurs que les moments d'inertie par rapport aux droites de ce plan, pris pour plan des XY. Il suffit donc de déterminer l'intersection de ce dernier avec l'ellipsoïde en faisant $z = 0$ dans l'équation de cette surface. On trouve ainsi :

$$Ax^2 + By^2 - 2Fxy = 1.$$

C'est l'*ellipse d'inertie.*

261. Problème. Expression du moment d'inertie d'un corps relativement à un axe OI, en fonction des moments d'inertie principaux relatifs au point O. — Soient α, β, γ, les angles que fait l'axe OI avec les axes principaux d'inertie du corps par rapport au point O ; si nous les adoptons pour axes de coordonnées,

$$D = 0, \quad E = 0, \quad F = 0. \quad (257)$$

La formule générale se simplifie donc et devient :

$$I = A \cos^2 \alpha + B \cos^2 \beta + C \cos^2 \gamma.$$

Il en résulte que deux corps possédant les mêmes moments d'inertie principaux relativement à un point, ont aussi le même ellipsoïde d'inertie.

262. Conditions pour qu'un axe OZ soit principal d'inertie d'un corps matériel au point O. — Prenons cette droite pour

axe des z et le point O pour origine des axes rectangulaires OXYZ. L'équation de l'ellipsoïde d'inertie ne devant plus renfermer de termes du premier degré en z, nous savons que :

$$D = 0, \quad E = 0.$$

263. Conditions pour qu'un axe soit principal d'inertie en un de ses points non désigné. — Soit O′ le point inconnu pour lequel l'axe OZ est principal d'inertie (*Fig.* 94). Rapportons ce point au système d'axes rectangulaires OXYZ et désignons par h la longueur inconnue OO′ qui le détermine. Par O′ imaginons un système O′X′Y′Z′ parallèle à OXYZ, il vient (262) :

$$\Sigma my'z' = 0, \quad \Sigma mx'z' = 0$$

or $x' = x$, $y' = y$, $z = h + z'$; donc :

$$\Sigma my'z' = \Sigma my\,(z - h) = 0, \quad \Sigma mx'z' = \Sigma mx\,(z - h) = 0,$$

et par suite :

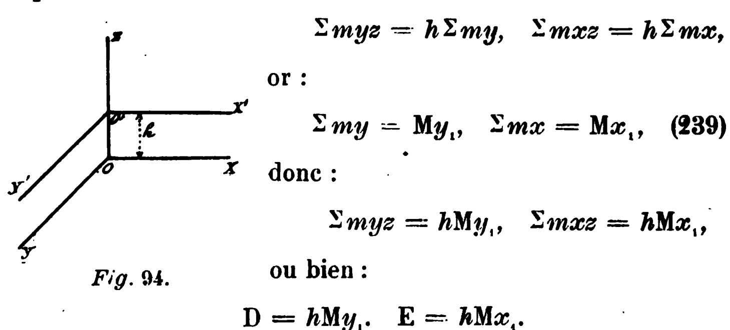


Fig. 94.

$$\Sigma myz = h\Sigma my, \quad \Sigma mxz = h\Sigma mx,$$

or :

$$\Sigma my = My_1, \quad \Sigma mx = Mx_1, \quad (239)$$

donc :

$$\Sigma myz = hMy_1, \quad \Sigma mxz = hMx_1,$$

ou bien :

$$D = hMy_1. \quad E = hMx_1.$$

D'où l'on tire :

$$Dx_1 = Ey_1.$$

C'est la condition d'existence du point O′, et alors la distance h, calculée par la relation : $h = \frac{D}{My_1} = \frac{E}{Mx_1}$, détermine ce point, qui est unique, à moins que h ne devienne indéterminée, ce que nous examinons au nº suivant.

264. Condition pour qu'un axe OZ soit principal d'inertie en tous ses points (*Fig.* 94). — La relation :

$$h = \frac{D}{My_1} = \frac{E}{Mx_1},$$

devant exister pour tous les points de OZ, h est indéterminée. Or au point O

$$D = 0, \quad E = 0,$$

puisque l'axe est principal d'inertie. Il faut donc que $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, c'est-à-dire que le centre de gravité soit sur OZ. Dans cette hypothèse les axes principaux d'inertie restent parallèles, quel que soit le point considéré sur l'axe. En effet, nous avons, pour les axes O'X'Y'Z' parallèles aux axes principaux OXYZ du point O, les relations :

$$(1) \quad \Sigma my'z' = 0, \quad \Sigma mx'z' = 0, \quad \Sigma mx'y' = 0,$$

car, en repassant aux axes OXYZ, ces équations s'écrivent :

$$\Sigma my\,(z - h) = 0, \quad \Sigma mx\,(z - h) = 0, \quad \Sigma mxy = 0,$$

ou bien :

$$(2) \quad \Sigma myz - h\text{M}y_1 = 0, \quad \Sigma mxz - h\text{M}x_1 = 0, \quad \Sigma mxy = 0.$$

Mais par hypothèse :

$$\Sigma myz = 0, \quad \Sigma mxz = 0, \quad \Sigma mxy = 0, \quad y_1 = 0, \quad x_1 = 0,$$

donc les relations (2), et par suite les équations (1), sont des identités.

Les seuls axes répondant à la question sont donc les trois axes principaux d'inertie relatifs au centre de gravité.

265. Calcul des moments d'inertie. — Nous admettons les mêmes hypothèses que dans la recherche des centres de gravité. La matière est supposée répartie d'une manière continue et la densité est fonction des coordonnées du point. Dès lors, les moments d'inertie se déterminent par la formule :

$$I = \int r^2 dm = \int \rho r^2 dv.$$

Dans les corps homogènes, la densité sort du signe intégrale et on en fait abstraction, de manière à considérer les moments d'inertie des volumes, sauf à rétablir ρ dans les résultats définitifs.

266. Moment d'inertie d'une ligne homogène. — Prenons l'axe proposé pour axe des y, la formule générale devient :

$$I = \rho \int_{s_0}^{s_1} r^2 ds = \rho \int_{x_0}^{x_1} r^2 \frac{ds}{dx}\, dx,$$

dans laquelle :

$$r^2 = x^2 + z^2, \quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}.$$

On tire, des équations de la courbe, $y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$, en fonction de x; quant aux limites d'intégration, elles se déterminent comme il est dit dans le cours d'analyse.

Si la ligne est plane et située dans le plan des xy, on a :

$$I = \rho \int x^2 \, dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Cette question n'a guère d'intérêt au point de vue pratique.

267. **Moment d'inertie d'une surface plane.** — En mécanique appliquée, on considère souvent le moment d'inertie d'une surface plane par rapport à une droite située dans son plan. Le problème est ramené dans ce cas à une intégration, que l'on simplifie en adoptant le plan de la figure pour plan des XY et la droite pour axe des x. Dans ces conditions :

$$I = \rho \int y^2 dxdy.$$

Les limites d'intégration se rapportent au contour de la surface.

Exemples. — 1°. *Moments d'inertie d'un triangle par rapport à une droite parallèle à l'un des côtés et passant : 1° par le sommet opposé; 2° par le centre de gravité.*

Soient h la hauteur du triangle, a et a' les segments qu'elle détermine sur le côté correspondant. La droite proposée étant prise pour axe des x, et la hauteur pour axe des y, il vient :

$$I = \rho \int y^2 dxdy = \rho \int_0^h y^2 dy \int_x^{x'} dx = \rho \int_0^h y^2 (x' - x) \, dy;$$

mais les équations des côtés OA et OB sont respectivement :

$$x' = \frac{a'}{h} y, \quad x = -\frac{ay}{h}.$$

Posons $a + a' = b$ et remplaçons x et x' par leurs valeurs dans I, il vient :

$$I = \rho \int_0^h y^2 \frac{(a + a')}{h} dy = \rho \frac{h^3 b}{4}.$$

Or la masse M du triangle est $\rho \frac{bh}{2}$, donc $I = \frac{Mh^2}{2}$ et le carré du rayon de giration vaut $\frac{h^2}{2}$.

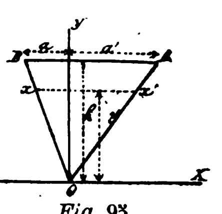


Fig. 93.

Si $h = 4^m$, $a = 2^m$, $a' = 3^m$, $\rho = 1$, on trouve I = 80 kilogrammètres.

La solution de la seconde partie du problème s'obtient par la formule :

$$I = M\delta^2 + \Sigma mr^2 \text{ (256)},$$

dans laquelle $\delta = \frac{2}{3} h$, $I = \frac{Mh^2}{2}$, $M = \rho \frac{bh}{2}$ et il vient :

$$\Sigma mr^2 = \frac{Mh^2}{2} - M\left(\frac{2}{3} h\right)^2 = \frac{Mh^2}{18}.$$

2°. *Moment d'inertie d'un rectangle par rapport à une droite passant par les milieux des côtés opposés..*

Soient b la base, h la hauteur du rectangle. On obtient :

$$I = \rho \frac{bh^3}{12} = \frac{Mh^2}{12}.$$

3°. *Moment d'inertie d'un cercle de rayon* R *par rapport à un diamètre.*

On trouve :

$$I = \frac{1}{4} \rho \pi R^4 = \frac{1}{4} MR^2.$$

268. Moment d'inertie d'un volume par rapport à une droite. — Prenons la droite pour axe des z, en sorte que $r^2 = x^2 + y^2$; la formule générale des moments d'inertie devient :

$$I = \rho \int_3 (x^2 + y^2)\, dxdydz = \rho \int_3 x^2 dxdydz + \rho \int_3 y^2 dxdydz.$$

Les limites d'intégration se déterminent comme il est dit dans les cours d'analyse.

Exemple. — *Moment d'inertie d'un parallélipipède rectangle homogène par rapport à l'une de ses arêtes.*

Soient a, b, c, les côtés du parallélipipède, M sa masse; la droite proposée étant prise pour axe des z, et les deux autres arêtes pour axes des x et des y, on a :

$$I = \rho \int_0^a x^2 dx \int_0^b dy \int_0^c dz + \rho \int_0^a dx \int_0^b y^2 dy \int_0^c dz$$
$$= \rho\, abc \left(\frac{a^2 + b^2}{3}\right) = M \left(\frac{a^2 + b^2}{3}\right).$$

Le moment d'inertie par rapport à un axe parallèle mené par le centre de gravité s'obtient par la formule du nº 256 et on trouve facilement :

$$\Sigma mr^2 = \frac{M}{12} (a^2 + b^2).$$

269. Moment d'inertie d'un volume de révolution homogène par rapport à son axe. — Déterminons au préalable, les moments d'inertie d'une circonférence et d'un cercle de rayon R, par rapport à l'axe perpendiculaire au plan de la figure mené par le centre. On trouve immédiatement leurs valeurs : $\rho 2 \pi R^3$ et $\frac{\rho \pi R^4}{2}$. Or, le volume de révolution étant engendré par le parallèle qui se déplace suivant l'axe OY, on a :

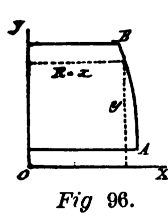


Fig 96.

$$I = \rho\pi \int_{y_a}^{y_b} \frac{x^4}{2} dy \quad (Fig.\ 96).$$

Les limites d'intégration se rapportent aux extrémités A et B de la courbe méridienne. Considérons la sphère de rayon R et prenons l'angle α pour variable indépendante (*Fig.* 97). Il vient :

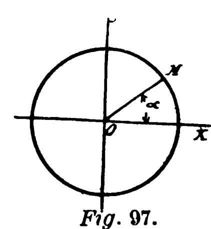


Fig. 97.

$$x = R \cos \alpha, \quad y = R \sin \alpha, \quad \frac{dy}{d\alpha} = R \cos \alpha,$$

$$I = \pi\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^5 \cos^5 \alpha\, d\alpha}{2} = \frac{2}{5} MR^2.$$

A ce propos remarquons qu'un ellipsoïde homogène et son ellipsoïde central d'inertie ne sont jamais semblables, sauf dans le cas de la sphère.

Appliquons encore la formule précédente à la détermination des moments d'inertie du cylindre et du cône par rapport à leurs axes

de révolution. On trouve facilement qu'ils sont exprimés par : $\frac{MR^2}{2}$ et $\frac{3MR^2}{10}$, si R désigne le rayon de la base.

270. **Problème. Rechercher le point pour lequel l'axe OX est principal d'inertie pour la portion du cône indiquée au n° 246.** (*Fig.* 88). — Tout d'abord, la condition du n° 263 devient $Ey_1 - Fz_1 = 0$. Elle est vérifiée, par suite de la symétrie du corps par rapport au plan bissecteur du dièdre OX. La position du point demandé est donc déterminée par la formule

$$x = \frac{E}{Mz_1},$$

dans laquelle :

$$E = \rho \int_0^d xdx \int_0^{\beta x} dy \int_0^{\sqrt{\beta^2 x^2 - y^2}} zdz = \rho \frac{\beta^3 d^5}{15}, \; z_1 = \frac{\beta}{\pi} d,$$

$$M = \frac{1}{4} \rho \pi R^2 \frac{d}{3}, \; \beta = \frac{R}{d},$$

et il vient :

$$x = \frac{4d}{5}.$$

CHAPITRE XXV

MÉCANIQUE DU CORPS SOLIDE

§ 1. *Mouvement du corps solide possédant un axe fixe.*

271. Les équations du mouvement du solide libre (226) pourraient servir de base à l'étude indiquée par le titre général de ce chapitre, mais il est plus simple de considérer le mouvement d'un corps solide comme résultant de deux mouvements simultanés, savoir :

1° Le mouvement d'entraînement par rapport aux axes fixes, de trois axes de directions constantes, menés par le centre de gravité.

2° Le mouvement du solide, relatif aux axes mobiles précédents.

Le premier mouvement est une translation déterminée par le théorème du centre de gravité rapporté aux axes fixes. Le second se fait sans intervention des forces fictives (188) ; en effet, les forces centrifuges composées disparaissent, puisque le mouvement d'entraînement est une translation ; pour ce même motif, les forces d'inertie d'entraînement ont une résultante unique équivalente,

appliquée au centre de gravité, car l'accélération d'entraînement est la même pour tous les points du corps. Les forces fictives sont donc sans influence sur le mouvement de rotation et nous en conclurons que : *Le mouvement d'un corps solide relativement à des axes de directions constantes passant par le centre de gravité, s'étudie comme un mouvement absolu, sans qu'il y ait à tenir compte des forces fictives.*

Le problème est ainsi ramené au mouvement du solide possédant un point fixe ; ce dernier mouvement est lui-même (101) représenté par une suite continue de rotations instantanées autour d'axes passant par ce point. Nous sommes donc conduits à considérer d'abord le cas du corps possédant un axe fixe. De là le programme de cette partie du cours :

1° Mouvement d'un corps solide possédant un axe fixe ;
2° „ „ „ „ „ point fixe ;
3° „ „ „ entièrement libre.

272. Problème. Mouvement du corps solide possédant un axe fixe. — *On donne les forces extérieures appliquées en des points déterminés d'un corps solide possédant un axe fixe, et les conditions initiales du mouvement. On demande la position du corps et sa vitesse angulaire à une époque quelconque.*

Ce système est à liaisons complètes (196); il suffit donc de trouver la loi du mouvement d'un de ses points, ce qui revient à déterminer la vitesse angulaire en fonction du temps. Si nous remplaçons les points fixes, appelés les *appuis* de l'axe, par leurs réactions, les six équations du mouvement du corps solide libre sont applicables au système. Nous les établissons en prenant l'origine au point fixe O et l'axe des z suivant l'axe du corps.

Soient X, Y, Z, les composantes d'une force extérieure ; x, y, z, les coordonnées de son point d'application ; P, Q, R, P', Q', R', les composantes des réactions des appuis O et O' (*Fig.* 98). Les équations du n° 226 deviennent :

$$(\mathrm{I})\begin{cases}(1)\ \Sigma X + P + P' = \dfrac{d}{dt}\Sigma m V_x, & (4)\ \Sigma L - Q'h = \dfrac{d\Sigma M_x mv}{dt},\\ (2)\ \Sigma Y + Q + Q' = \dfrac{d}{dt}\Sigma m V_y, & (5)\ \Sigma M + P'h = \dfrac{d\Sigma M_y mv}{dt},\\ (3)\ \Sigma Z + R + R' = \dfrac{d}{dt}\Sigma m V_z, & (6)\ \Sigma N = \dfrac{d\Sigma M_z mv}{dt}.\end{cases}$$

Il y a donc lieu de rechercher les projections de $\Sigma \overline{mv}$ et de

$\Sigma \overline{M_0 mv}$ sur les axes, et par suite $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$ pour un point quelconque du corps. Mais celui-ci tourne autour de OZ ; les formules du nº 63 donnent donc les projections de la vitesse demandée à condition de faire $p = 0$, $q = 0$, $r = \omega$. Il vient ainsi :

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y, \quad \frac{dy}{dt} = \omega x, \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

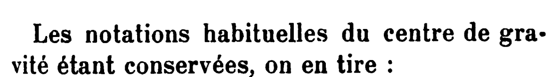


Fig. 98.

Les notations habituelles du centre de gravité étant conservées, on en tire :

$$\Sigma m \frac{dx}{dt} = -\omega \Sigma my = -M\omega y_1, \quad \Sigma m \frac{dy}{dt} = M\omega x_1, \quad \Sigma m \frac{dz}{dt} = 0.$$

De même :

$$\Sigma M_x mv = -\Sigma m \frac{dy}{dt} z = -\omega \Sigma mxz = -E\omega,$$
$$\Sigma M_y mv = -\omega \Sigma myz = -D\omega, \quad \Sigma M_z mv = \omega \Sigma m (x^2 + y^2) = C\omega.$$

Nous trouvons en dérivant :

$$\frac{d}{dt} \Sigma m \frac{dx}{dt} = -My_1 \frac{d\omega}{dt} - M\omega \frac{dy_1}{dt} = -My_1 \frac{d\omega}{dt} - M\omega^2 x_1,$$
$$\frac{d}{dt} \Sigma m \frac{dy}{dt} = Mx_1 \frac{d\omega}{dt} - M\omega^2 y_1,$$
$$\frac{d}{dt} \Sigma m \frac{dz}{dt} = 0,$$
$$\frac{d}{dt} \Sigma M_x mv = -E \frac{d\omega}{dt} + \omega^2 D,$$
$$\frac{d}{dt} \Sigma M_y mv = -D \frac{d\omega}{dt} - E\omega^2,$$
$$\frac{d}{dt} \Sigma M_z mv = C \frac{d\omega}{dt}.$$

Les équations (I) se mettent donc sous la forme suivante :

$$\text{(II)} \begin{cases} (1) \ \Sigma X + P + P' = -M\left(\omega^2 x_1 + \frac{d\omega}{dt} y_1\right), \\ (2) \ \Sigma Y + Q + Q' = -M\left(\omega^2 y_1 - \frac{d\omega}{dt} x_1\right), \\ (3) \ \Sigma Z + R + R' = 0, \\ (4) \ \Sigma L - Q'h = -\frac{d\omega}{dt} E + D\omega^2, \\ (5) \ \Sigma M + P'h = -\frac{d\omega}{dt} D - E\omega^2, \\ (6) \ \Sigma N = C \frac{d\omega}{dt}. \end{cases}$$

La dernière équation représente la loi du mouvement et s'énonce comme suit : *L'accélération angulaire d'un corps solide tournant autour d'un axe fixe est égale au moment résultant des forces extérieures par rapport à cet axe, divisé par le moment d'inertie du corps solide relativement à la même droite.*

Les autres équations servent à calculer les réactions : nous obtenons Q' et P' au moyen des équations (4) et (5), tandis que (1) et (2) font connaître ensuite P et Q ; la troisième équation donne la somme $R + R'$. Il n'est pas possible de calculer séparément ces composantes, car l'indéformabilité supposée au corps solide, permet d'assimiler les points matériels situés sur l'axe, à une tige rigide unissant les deux appuis. Toute action produite suivant l'axe, se transmet donc aux deux points fixes qui s'entr'aident pour y résister, en vertu du théorème de la transposition des forces (227). Dès lors, la répartition de la somme $R + R'$ entre les appuis devient impossible avec les données du problème; elle est d'ailleurs sans influence si le solide est indéformable.

Lorsqu'on passe aux corps naturels, les déformations dues aux forces permettent d'établir, dans la théorie de l'élasticité, de nouvelles relations où interviennent les réactions. Elles forment système avec les six équations du corps solide déformé et le nombre de relations auquel l'on arrive suffit pour déterminer R et R'.

De ce qui précède on déduit la règle :

Pour étudier le mouvement d'un corps solide possédant un axe fixe, on remplace les points d'appuis par leurs réactions, on établit les six équations du mouvement du corps rendu libre en prenant l'axe de la rotation pour axe des z et l'un des appuis pour origine. Les cinq premières équations servent au calcul des réactions, la sixième donne la loi du mouvement,

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma N}{I}.$$

273. **Axes permanents de rotation.** — *A un instant donné on supprime la fixité du point O' et les forces extérieures appliquées au solide et l'on demande les conditions pour que la rotation continue autour du même axe.*

Elles résultent des équations (II) (272), dans lesquelles nous annulons simultanément ΣX, ΣY, ΣZ, ΣL, ΣM, ΣN, P', Q', R', et il vient :

$$(1)\ P = -M\left(\omega^2 x_1 + \frac{d\omega}{dt} y_1\right), \qquad (4)\ 0 = -\frac{d\omega}{dt} E + D\omega^2,$$

$$(2)\ Q = -M\left(\omega^2 y_1 - \frac{d\omega}{dt} x_1\right), \qquad (5)\ 0 = -\frac{d\omega}{dt} D - E\omega^2,$$

$$(3)\ R = 0, \qquad (6)\ 0 = C\frac{d\omega}{dt}.$$

Des équations (4), (5), (6) on tire d'ailleurs :

$$\frac{d\omega}{dt} = 0, \quad D = 0, \quad E = 0.$$

La rotation est donc uniforme et se fait autour d'un axe principal d'inertie du point fixe (262). Réciproquement, si l'on avait admis $D = 0$, $E = 0$, sans supprimer le second point fixe, les équations auraient donné $\frac{d\omega}{dt} = 0$, $P' = 0$, $Q' = 0$, $R + R' = 0$, ce qui montrerait que le second point fixe serait inutile pendant toute la durée du mouvement. Si donc *un corps solide possédant un point fixe, n'est soumis à aucune force extérieure et s'il est animé d'une rotation initiale autour de l'un des axes principaux d'inertie du point fixe, le mouvement continue indéfiniment autour de cet axe comme s'il était fixe, et la rotation est uniforme.* Pour ce motif, les trois axes principaux du point fixe, sont appelés *axes permanents de rotation.*

Il est à remarquer qu'un solide soumis à la seule action de la pesanteur et fixé par son centre de gravité, répond aux conditions du problème, car la rotation n'est pas influencée par le poids du corps.

274. Théorème. — *Lorsqu'un corps solide possédant un point fixe est soumis à l'action d'un système de forces extérieures dont le moment résultant par rapport au point fixe, est parallèle à l'un des axes principaux d'inertie de celui-ci, la rotation commencée autour de cet axe, continue comme s'il était fixe.*

Cela résulte des équations (II) dans lesquelles

$$D = 0, E = 0,$$

parce que OZ est principal d'inertie au point O; en même temps

$$\Sigma L = 0, \Sigma M = 0,$$

parce que $\overline{\Sigma M_o F_e}$ est parallèle à OZ. Dans ces conditions :

$$(1)\quad \Sigma X + P + P' = -M\left(\omega^2 x_1 + \frac{d\omega}{dt} y_1\right), \qquad (4)\quad Q'h = 0,$$

$$(2)\quad \Sigma Y + Q + Q' = -M\left(\omega^2 y_1 - \frac{d\omega}{dt} x_1\right), \qquad (5)\quad P'h = 0,$$

$$(3)\quad \Sigma Z + R + R' = 0, \qquad (6)\quad \Sigma N = C\frac{d\omega}{dt}.$$

On en tire $P' = 0$, $Q' = 0$, donc la fixité du point O' peut être supprimée sans troubler le mouvement, car l'appui O est capable de développer une réaction égale à $-\Sigma Z$, quelque grande que soit cette force. C'est ce qui se présente par exemple, quand *les forces extérieures sont dans un plan contenant deux des axes principaux d'inertie du point fixe. Dans cette hypothèse, le solide, immobile à l'époque initiale, prend un mouvement de rotation autour du troisième axe principal d'inertie.*

275. Axes naturels de rotation. — *On supprime les points fixes et les forces extérieures et l'on demande les conditions pour que la rotation, commencée autour de l'axe* OZ, *continue autour de cette droite comme si elle était fixe.*

Annulons ΣX, ΣY, ΣZ, ΣL, ΣM, ΣN, P, Q, R, P', Q', R', dans les équations (II) du n° 272 qui deviennent :

$$(1)\quad 0 = -M\left(\omega^2 x_1 + \frac{d\omega}{dt} y_1\right),$$

$$(2)\quad 0 = -M\left(\omega^2 y_1 - \frac{d\omega}{dt} x_1\right),$$

$$(4)\quad 0 = -\frac{d\omega}{dt} E + D\omega^2,$$

$$(5)\quad 0 = -\frac{d\omega}{dt} D - E\omega^2, \qquad (6)\quad 0 = C\frac{d\omega}{dt}.$$

De l'équation (6) résulte ce fait que la rotation est uniforme ; son axe est principal d'inertie du centre de gravité, car on tire des autres équations $x_1 = y_1 = 0$, $D = E = 0$ (257). On établirait comme ci-dessus la réciproque.

Si donc un corps solide entièrement libre n'est soumis à aucune force extérieure et s'il est animé d'une rotation initiale autour d'un axe principal d'inertie du centre de gravité, le mouvement se fait comme si cette droite était fixe, et la rotation est uniforme. Les axes principaux d'inertie du centre de gravité sont appelés pour ce motif, *axes naturels de rotation.*

Par un raisonnement analogue, on prouve que si un solide est

soumis à l'action d'un couple de forces, situé dans le plan de deux axes principaux d'inertie du centre de gravité, et s'il est animé d'une rotation autour du troisième axe principal d'inertie, il continue à tourner autour de cette droite comme si elle était fixe, mais le mouvement n'est pas uniforme.

276. **Problème.** — *Chercher les conditions auxquelles doit satisfaire un corps solide possédant un axe fixe, pour que les réactions des appuis soient indépendantes du mouvement.*

On satisfait à cette condition, en annulant dans les équations (II) du nº 272, les termes qui contiennent ω ou sa dérivée. Il vient donc :

$$\omega^2 x_1 + \frac{d\omega}{dt} y_1 = 0, \quad \omega^2 y_1 - \frac{d\omega}{dt} x_1 = 0,$$
$$-\frac{d\omega}{dt} E + D\omega^2 = 0, \quad -\frac{d\omega}{dt} D - \omega^2 E = 0.$$

En éliminant $\frac{d\omega}{dt}$ entre les deux premières relations, puis entre les deux dernières, on trouve :

$$\omega^2 (y_1^2 + x_1^2) = 0, \quad \omega^2 (D^2 + E^2) = 0,$$

et par conséquent :

$$x_1 = 0, \quad y_1 = 0, \quad D = 0, \quad E = 0,$$

d'où l'on conclut que l'axe fixe est un axe naturel de rotation (275).

Les arbres de machines sont construits de manière à tourner autour d'un axe de cette espèce. Il sont dits *centrés* et les réactions des appuis sont indépendantes des forces totales, ou des réactions d'inertie, si l'on adopte les conventions de d'Alembert (134). Ces forces peuvent être très grandes, soit par suite des masses, soit par suite de ω ; elles augmentent les pressions sur les appuis ainsi que les frottements, en outre elles provoquent des vibrations. En termes de métier, on dit alors que l'arbre ne tourne pas *rond*.

277. **Expression du moment résultant des quantités de mouvement d'un corps solide tournant autour d'un axe, relativement à un point de celui-ci, en fonction des moments d'inertie principaux.** — Soient OI l'axe donné; OX, OY, OZ, les axes principaux d'inertie du solide relatifs au point O. Ils sont solidaires du corps, ce que prouvent les relations $\Sigma myz = 0$, $\Sigma mxz = 0$, $\Sigma mxy = 0$, (257) qui les définissent. Or les projections de $\Sigma \overline{M_o mv}$ sur les axes sont :

$$\Sigma m\left(\frac{dz}{dt}y - \frac{dy}{dt}z\right), \quad \Sigma m\left(\frac{dx}{dt}z - \frac{dz}{dt}x\right),$$
$$\Sigma m\left(\frac{dy}{dt}x - \frac{dx}{dt}y\right). \quad (137)$$

Mais, si p, q, r, sont les projections de $\overline{OI}$ sur les axes principaux d'inertie du point O on a :

$$\frac{dx}{dt} = qz - ry, \quad \frac{dy}{dt} = rx - pz, \quad \frac{dz}{dt} = py - qx. \ (63)$$

De plus on donne par hypothèse :

$$A = \Sigma m\,(y^2 + z^2), \quad B = \Sigma m\,(x^2 + z^2), \quad C = \Sigma m\,(x^2 + y^2),$$
$$\Sigma myz = 0, \quad \Sigma mxz = 0, \quad \Sigma mxy = 0.$$

En tenant compte de ces résultats, il vient :

$$\Sigma M_x mv = p\Sigma m\,(y^2 + z^2) - q\Sigma mxy - r\Sigma mxz = Ap.$$
$$\Sigma M_y mv = Bq, \quad \Sigma M_z mv = Cr,$$

d'où l'on tire :

$$\Sigma M_o mv = \sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2},$$
$$\cos\lambda = \frac{Ap}{\Sigma M_o mv}, \quad \cos\mu = \frac{Bq}{\Sigma M_o mv}, \quad \cos\nu = \frac{Cr}{\Sigma M_o mv}.$$

Considérons maintenant l'ellipsoïde d'inertie du corps relatif au point O. Menons le plan tangent au point de percée de l'axe de la rotation avec cette surface; $\overline{\Sigma M_o mv}$ lui est perpendiculaire.

En effet, les équations de l'axe de rotation $\overline{OI}$, et de l'ellipsoïde d'inertie dans le système OXYZ, sont :

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} \quad \text{et} \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1;$$

on en déduit les coordonnées du point de percée, savoir :

$$\frac{p}{\sqrt{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}}, \quad \frac{q}{\sqrt{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}}, \quad \frac{r}{\sqrt{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}},$$

et l'équation du plan tangent à l'ellipsoïde d'inertie en ce point devient :

$$Apx + Bqy + Crz = \sqrt{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}.$$

Ses coefficients sont proportionnels aux cosinus directeurs de $\overline{\Sigma M_o mv}$, *qui est donc perpendiculaire au plan tangent à l'ellip-*

soïde d'inertie du corps relatif au point O, *mené au point de percée de l'axe de la rotation avec cette surface.*

Ces différents résultats conviennent aux rotations instantanées aussi bien qu'aux rotations continues, puisque le même raisonnement peut être tenu dans les deux cas.

Il est à remarquer que le moment $\overline{\Sigma \mathrm{M}omv}$ est aussi le moment du couple résultant des quantités de mouvement correspondant à la rotation autour de $\overline{\mathrm{OI}}$, par rapport au point fixe O.

278. **Expression de la force vive d'un solide tournant autour d'un axe.** — Soient r la distance d'un point du corps à l'axe de la rotation, ω sa vitesse angulaire à l'époque t. La force vive du solide sera $\omega^2\Sigma mr^2$. Dans cette formule Σmr^2, est le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe de la rotation. Il s'évalue en partant des projections p, q, r, de ce dernier, sur les axes principaux d'inertie du corps relatifs au point O. Soient α, β, γ, les angles directeurs de OI, il vient (261) :

$$\Sigma mr^2 = \mathrm{A}\cos^2\alpha + \mathrm{B}\cos^2\beta + \mathrm{C}\cos^2\beta,$$

mais :

$$\cos\alpha = \frac{p}{\omega}, \quad \cos\beta = \frac{q}{\omega}, \quad \cos\gamma = \frac{r}{\omega},$$

par conséquent :

$$\omega^2\Sigma mr^2 = \mathrm{A}p^2 + \mathrm{B}q^2 + \mathrm{C}r^2.$$

Ce résultat important, s'applique aux rotations instantanées.

279. **Problème.** — *On donne : 1° un cube en fonte de* $0^{m}20$ *de côté, qui tourne autour d'un axe vertical passant par les centres des bases horizontales ; 2° une force* $\overline{\mathrm{F}}$ *de 1000 kilogrammes, appliquée suivant une arête horizontale ; 3° la position initiale du système. Le système étant immobile à l'instant initial, on demande sa vitesse angulaire après une minute.*

Nous appliquerons l'équation :

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Sigma \mathrm{N}}{\mathrm{I}},$$

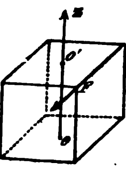


Fig. 99.

en prenant le mètre, la seconde, le kilogramme pour unités. Le poids du m^3 de fonte étant 7500 kilog., il vient en désignant par a le coté du cube :

$$a = 0{,}2 \quad \rho = \frac{\varpi}{g} = \frac{7500}{9{,}81}, \quad M = \frac{7500}{9{.}81}(0{,}2)^3 = 6^{k}{,}12,$$

$$I = \frac{1}{6}a^2 M = 0^{km}{,}04, \quad \Sigma N = 100^{km},$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{100}{0{,}04} = 2500^{m}, \quad \omega = 2500\,t + c^{te}.$$

La constante est nulle car pour $t = 0$, on a $\omega = 0$; donc à l'époque $t = 60''$, $\omega = 2500^{m} \times 60 = 150.000^{m}$.

280. **Du pendule composé.** — On donne le nom de *pendule composé* au système matériel formé par un corps solide qui oscille autour d'un axe fixe horizontal, sous la seule action de son poids. Dans ce mouvement le centre de gravité G (*Fig.* 100) se meut dans un plan perpendiculaire à cette droite, et décrit un arc de circonférence de rayon $OG = a$, au centre duquel nous plaçons l'origine des coordonnées. L'axe fixe, considéré en avant du papier, est pris pour axe positif des z; l'axe des y positif est dirigé suivant la verticale et a le sens de la pesanteur; l'axe des x est horizontal. Le centre de gravité a sa position déterminée par l'angle θ que fait OG avec OY positif. Par convention cet angle croît positivement de OY vers OX et la vitesse angulaire s'exprime par $-\frac{d\theta}{dt}$. Si donc Mg est le poids total du corps, nous aurons l'équation du mouvement et son intégrale :

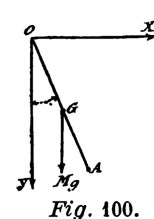


Fig. 100.

$$-\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{Mga \sin\theta}{I},$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 2\,\frac{Mga\cos\theta}{I} + c^{te};$$

mais à l'époque initiale $\theta = \theta_0$, $\frac{d\theta}{dt} = 0$, donc $c^{te} = -\frac{Mga\cos\theta_0}{I}$ et il vient :

$$(1) \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2Mga}{I}(\cos\theta - \cos\theta_0).$$

Identifions cette équation avec celle du pendule simple (184) en y remplaçant a par l pour éviter toute confusion, on a :

$$\frac{g}{l} = \frac{gMa}{I} \text{ ou } (2)\ l = \frac{I}{Ma}.$$

Telle est la longueur du pendule simple, qui, placé dans les mêmes conditions initiales que le pendule composé, aurait le même mouvement. Transformons cette expression en fonction des rayons de giration R et K du pendule composé, par rapport à l'axe fixe et à sa parallèle menée par le centre de gravité.

De la relation $MR^2 = MK^2 + Ma^2$, on tire en remplaçant I par sa valeur dans (2) :

$$(3) \quad l = \frac{R^2}{a} = a + \frac{K^2}{a}.$$

Portons cette longueur, nécessairement plus grande que a, sur OG en OA. Le point A détermine le pendule simple synchrone du pendule composé; la parallèle à l'axe fixe menée par ce point, s'appelle l'axe d'*oscillation*; l'axe fixe est dit de *suspension*. Tous les points du corps situés à la distance l de l'axe de suspension se meuvent comme des pendules simples isolés, tandis que les autres points ont leurs mouvements accélérés ou retardés par la liaison au solide, suivant que les distances à l'axe de suspension, sont plus grandes ou plus petites que l.

La formule (3) montre encore que le centre de gravité se trouve entre les deux axes.

Enfin si nous posons : $AG = l - a = a'$, nous aurons $a' = \frac{K^2}{a}$. Or K^2 est constante, puisque la direction de l'axe de suspension est supposée invariable par rapport au solide. Si dans cette relation on fait $a = a'$, réciproquement a' devient égal à a, résultat que l'on interprète en disant que si l'axe d'oscillation est pris pour axe de suspension, il lui correspond un axe d'oscillation qui est l'axe de suspension primitif, et la durée d'une oscillation ne change pas. C'est en cela que consiste la *réciprocité* des axes, propriété mise à profit dans le pendule à réversion, décrit en géodésie. Cet instrument permet de déterminer avec précision la longueur du pendule battant la seconde. Dès lors, la formule $t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, dans laquelle l est connu et t vaut l'unité, donne g.

§ 2. *Mouvement du corps solide possédant un point fixe*

281. Problème. — ***On donne un corps solide qui a un point fixe, son état initial, et les forces extérieures qui lui sont appliquées. On demande son mouvement, c'est-à-dire sa position et l'axe instantané contemporain, à une époque quelconque.***

Remplaçons le point fixe par sa réaction, ce qui permet d'écrire les équations du mouvement du corps solide libre, en considérant les forces extérieures et la réaction du point fixe. Si nous prenons celui-ci comme origine, les trois premières équations donnent les composantes de la réaction. Les équations des moments, indépendantes de ces inconnues, déterminent le mouvement. Celui-ci est représenté à chaque instant par une rotation instantanée autour d'un axe $\overline{OI}$ passant par le point fixe (101). Il suffit donc de déterminer ce vecteur par rapport au corps et la position du corps lui-même relativement aux axes rectangulaires $OX_1Y_1Z_1$ (*Fig.* 101). Or les trois axes principaux d'inertie du corps par rapport au point fixe, sont solidaires du corps et forment un système OXYZ rapporté à $OX_1Y_1Z_1$ au moyen des coordonnées d'Euler φ, ψ, θ ; de plus l'axe instantané $\overline{OI}$ se projette sur les axes OX, OY, OZ, suivant p, q, r ; donc les inconnues du problème sont $p, q, r, \varphi, \psi, \theta$, à rechercher en fonction du temps. A cet effet, appliquons le théorème des moments, mis sous la forme suivante : *La vitesse de l'index sur la courbe indicatrice du moment résultant des quantités de mouvement par rapport au point fixe, est égale au moment résultant des forces extérieures par rapport au même point.*

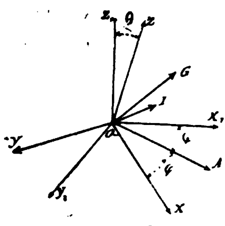


Fig. 101.

Soient G l'index et $\overline{OG} = \Sigma\overline{M_0 mv}$; par suite du théorème précédent :

$$\frac{d.\overline{OG}}{dt} = \Sigma\overline{M_0 F_e},$$

égalité géométrique équivalente à trois équations de projection sur les axes principaux d'inertie du point O. Mais la vitesse de l'index est résultante d'une vitesse relative au système des axes principaux et d'une vitesse d'entraînement. Les projections sont d'ailleurs les sommes algébriques des projections de ces deux

composantes; or les coordonnées de l'index G par rapport aux axes principaux d'inertie du point fixe sont Ap, Bq, Cr (277), et par suite les projections de la vitesse relative sur les axes OX, OY, OZ sont :

$$A\frac{dp}{dt}, \quad B\frac{dq}{dt}, \quad C\frac{dr}{dt} \quad (47).$$

De plus la vitesse d'entraînement de l'index, relié invariablement aux axes mobiles dans la rotation instantanée $\overline{OI}$ qui constitue le mouvement d'entraînement, a ses projections déterminées par les formules du n° 63, dans lesquelles x, y, z sont égales à Ap, Bq, Cr. Ce qui donne :

$$qr(C-B), \quad rp(A-C), \quad pq(B-A).$$

Si donc L, M, N, sont les moments résultants des forces extérieures par rapport aux axes principaux d'inertie du point fixe, c'est-à-dire les projections, sur ces axes, de $\Sigma \overline{M_o F_e}$ (14), nous aurons :

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + qr(C-B) = L, \\ B\dfrac{dq}{dt} + rp(A-C) = M, \\ C\dfrac{dr}{dt} + pq(B-A) = N. \end{cases}$$

Ces équations sont dites d'*Euler*. Lorsque L, M, N, sont indépendants de la position du corps, c'est-à-dire de φ, ψ, θ, l'intégration donne p, q, r, en fonction du temps et de trois constantes arbitraires, déterminées en partant des composantes p_o, q_o, r_o de la rotation initiale. Les coordonnées d'Euler φ, ψ, θ, résultent des relations (108) :

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} p = \sin\varphi \sin\theta \dfrac{d\psi}{dt} + \cos\varphi \dfrac{d\theta}{dt}, \\ q = \cos\varphi \sin\theta \dfrac{d\psi}{dt} - \sin\varphi \dfrac{d\theta}{dt}, \\ r = \dfrac{d\varphi}{dt} + \cos\theta \dfrac{d\psi}{dt}. \end{cases}$$

Après y avoir remplacé p, q, r, par les valeurs tirées de (I), on forme un système de trois équations du premier ordre en φ, ψ, θ, on obtient ces inconnues en fonction du temps et de trois constantes d'intégration.

Mais en général les forces extérieures dépendent de φ, ψ, θ, et le

problème revient à l'intégration d'un système de six équations différentielles simultanées, que l'on résout en éliminant p, q, r des équations d'Euler au moyen des équations (II). De là, trois équations du second ordre en φ, ψ et θ, qui serviront à calculer ces inconnues en fonction du temps et de six constantes arbitraires d'intégration. On en conclut la règle suivante : *Pour étudier le mouvement d'un corps possédant un point fixe, on remplace ce dernier par sa réaction ; on établit les six équations du mouvement du corps rendu libre, en prenant l'origine des coordonnées au point fixe. Les trois premières équations donnent la réaction, et les trois dernières déterminent l'axe instantané de rotation ; elles se forment en écrivant que la vitesse de l'index sur la courbe indicatrice du moment résultant des quantités de mouvement par rapport au point fixe, a ses projections sur les axes principaux d'inertie du corps relatif à ce point, égales aux moments résultants correspondants des forces extérieures. On joint à ces trois équations, les trois relations trouvées en cinématique, et le système formé sert au calcul de* p, q, r, φ, ψ, θ.

282. **Cas particulier.** — $\Sigma \overline{\mathbf{M}_0\mathbf{F}_e} = 0$. — Ce cas se présente quand les forces extérieures sont constamment nulles, ou ont une résultante équivalente passant par le point fixe. Il en est ainsi pour un corps pesant fixé par son centre de gravité. Les équations (I) deviennent :

$$A \frac{dp}{dt} + qr\,(C - B) = 0,$$

$$B \frac{dq}{dt} + rp\,(A - C) = 0, \quad C \frac{dr}{dt} + pq\,(B - A) = 0.$$

Si on les multiplie successivement par Ap, Bq, Cr, et si on les ajoute, on trouve :

$$A^2p \frac{dp}{dt} + B^2q \frac{dq}{dt} + C^2r \frac{dr}{dt} = 0,$$

d'où :

$$(1) \quad A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = G^2.$$

G^2 est la constante d'intégration, et Ap, Bq, Cr, sont les projections de $\Sigma \overline{M_0 mv}$ sur les axes principaux du point fixe, donc *le moment résultant des quantités de mouvement du corps solide par rapport au point fixe est constant ;* c'est une conséquence

évidente du théorème du moment résultant des quantités de mouvement.

Multiplions ensuite les mêmes équations par p, q, r, et ajoutons-les ; il vient :

$$Ap\frac{dp}{dt} + Bq\frac{dq}{dt} + Cr\frac{dr}{dt} = 0,$$

d'où

$$(2)\quad Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2T.$$

C'est l'intégrale de la force vive et 2T est la constante d'intégration. L'équation (2) prouve que la force vive totale du solide est constante, résultat évident *a priori*, puisque le corps est indéformable et que les forces extérieures ne développent aucun travail.

Les équations (1) et (2) permettent de calculer p et q en fonction de r ; on substitue à ces composantes leurs valeurs dans l'une des équations d'Euler, on obtient par intégration r et par suite p et q. On remplace enfin p, q, r, dans les équations (II) et on trouve après intégration φ, ψ, θ, en fonction du temps et des constantes.

283. **Interprétation géométrique de Poinsot.** — L'équation de l'ellipsoïde d'inertie du corps solide relatif au point fixe, rapporté aux axes principaux d'inertie, est :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1.$$

On sait de plus que les équations de l'axe instantané de rotation sont :

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}.$$

Le point P (*Fig.* 102) où cette droite perce l'ellipsoïde d'inertie, s'appelle le pôle *instantané*, et il a pour coordonnées :

$$\frac{p}{\sqrt{2T}},\quad \frac{q}{\sqrt{2T}},\quad \frac{r}{\sqrt{2T}}.$$

Soit d le diamètre de l'ellipsoïde passant par ce point ; les coordonnées de l'extrémité I de l'axe instantané de rotation sont p, q, r, et l'on a facilement :

$$\frac{d}{\omega} = \frac{\frac{p}{\sqrt{2T}}}{p} = \frac{\frac{q}{\sqrt{2T}}}{q} = \frac{\frac{r}{\sqrt{2T}}}{r},$$

$$\omega = d\sqrt{2T}.$$

De là, ce théorème : *La vitesse angulaire de la rotation instantanée est proportionnelle à la longueur du diamètre de l'ellipsoïde d'inertie autour duquel elle se produit.*

Le plan tangent à l'ellipsoïde d'inertie au pôle instantané a pour équation :

$$\frac{Ap}{\sqrt{2T}}x + \frac{Bq}{\sqrt{2T}}y + \frac{Cr}{\sqrt{2T}}z = 1.$$

Il est perpendiculaire au moment résultant des quantités de mouvement par rapport au point fixe (277) ; ce moment étant constant, le plan tangent au pôle instantané a une direction constante. C'est le plan *invariable* (212) et sa distance h au point fixe est elle-même constante. En effet, si α est l'angle de $\overline{OI}$ avec le moment résultant invariable des quantités de mouvement $\overline{OG}$, on a en vertu des équations (1) et (2) :

$$h = d\cos\alpha = d\left(\frac{p}{d\sqrt{2T}}\frac{Ap}{G} + \frac{q}{d\sqrt{2T}}\frac{Bq}{G} + \frac{r}{d\sqrt{2T}}\frac{Cr}{G}\right) = \frac{\sqrt{2T}}{G}.$$

En résumé : *Le plan tangent à l'ellipsoïde d'inertie au pôle instantané est invariable.* De plus :

$$OI\cos\alpha = \omega\cos\alpha = \frac{\omega\sqrt{2T}}{Gd} = \frac{2Td}{Gd} = \frac{2T}{G},$$

donc : *la composante de la rotation instantanée suivant la direction invariable du moment résultant des quantités de mouvement du solide par rapport au point fixe, est constante.*

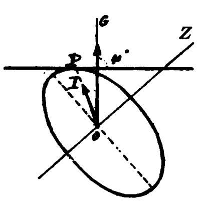


Fig. 102.

Ces trois théorèmes donnent le moyen de représenter avec clarté le mouvement du solide. On le suppose solidaire de son ellipsoïde d'inertie par rapport au point fixe ; cette surface, tangente au plan invariable, est animée à chaque instant d'une rotation instantanée proportionnelle à la longueur du diamètre passant par le pôle instantané, autour duquel elle se produit. Elle donne une composante normale au plan invariable qui est constante, et une composante variable située dans ce plan. L'ellipsoïde d'inertie roule donc sans glisser sur le plan invariable, mais ce mouvement est accompagné d'un pivotement constant (98).

Le lieu des pôles instantanés sur l'ellipsoïde d'inertie s'appelle

la *polhodie;* par conséquent le lieu des axes instantanés de rotation dans le solide, est un cône s qui a son sommet au point fixe et ses génératrices limitées à la polhodie.

Le lieu du pôle instantané sur le plan invariable est une courbe fixe que l'on nomme *herpolhodie.* Le cône S qui a pour sommet le point fixe et pour base l'herpolhodie, est le lieu des axes instantanés dans l'espace.

284. On obtient encore le mouvement du solide en le supposant solidaire du cône s qui roule sans glisser sur le cône S, avec une vitesse angulaire proportionnelle à la longueur de la génératrice de contact.

L'équation du cône s, dans le système formé par les axes principaux d'inertie OX, OY, OZ du point fixe, se forme, en éliminant p, q, r des équations de l'axe instantané :

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}.$$

On trouve facilement en tenant compte des relations (1) et (2) du n° 282 et des propriétés des proportions :

$$\frac{Ax^2 + By^2 + Cz^2}{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2} = \frac{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2}{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2},$$

ou :

$$\frac{Ax^2 + By^2 + Cz^2}{2T} = \frac{A^2x^2 + B^2y^2 + C^2r^2}{G^2},$$

et il vient après réduction :

$$A(G^2 - 2TA)x^2 + B(G^2 - 2TB)y^2 + C(G^2 - 2TC)z^2 = 0;$$

c'est l'équation d'un cône du second degré dont le sommet est au point fixe et qui a les mêmes axes que l'ellipsoïde d'inertie.

Supposons $A > B > C$ et par suite

$$G^2 - 2TA < G^2 - 2TB < G^2 - 2TC;$$

nous aurons nécessairement, sauf dans des cas particuliers examinés plus loin ;

$$G^2 - 2TA < 0, \quad G^2 - 2TC > 0.$$

De là trois hypothèses :

1° $G^2 - 2TB > 0$, 2° $G^2 - 2TB < 0$, 3° $G^2 - 2TB = 0$.

1° $G^2 - 2TB > 0$. Dans ces conditions un plan $x = \alpha$, coupe le cône s suivant une ellipse, car l'intersection a pour équation :

$$B(G^2 - 2TB)y^2 + C(G^2 - 2TC)z^2 = -(G^2 - 2TA)A\alpha^2.$$

De même, on prouverait que toute section faite normalement à l'axe OY ou à l'axe OZ, est une hyperbole. Le cône s entoure donc complètement l'axe du plus grand moment d'inertie.

2° $G^2 - 2TB < 0$. Le raisonnement précédent prouve que le cône s entoure l'axe du plus petit moment d'inertie.

3° $G^2 - 2TB = 0$. L'équation du cône devient :

$$A(G^2 - 2TA)x^2 + C(G^2 - 2TC)z^2 = 0,$$

ou :

$$\frac{x}{z} = \pm\sqrt{\frac{-C(G^2 - 2TC)}{A(G^2 - 2TA)}},$$

ce qui représente deux plans également inclinés sur le plan OXY ou sur le plan OYZ et qui passent par l'axe d'inertie moyen OY. Ils déterminent par leurs intersections avec l'ellipsoïde d'inertie deux ellipses qui constituent la *polhodie*.

4° $G^2 - 2TA = 0$. Dans l'hypothèse $G^2 - 2TA = 0$, les deux autres coefficients de l'équation sont nécessairement positifs, et par conséquent $y = 0$, $z = 0$. Le cône s se confond alors avec l'axe du plus grand moment d'inertie et la polhodie se réduit au sommet de l'ellipsoïde.

5° $G^2 - 2TC = 0$. Les deux autres coefficients étant négatifs, on a $x = 0$, $y = 0$; le cône s se confond donc avec l'axe du plus petit moment d'inertie et la polhodie se réduit au sommet correspondant de l'ellipsoïde.

Dans ces deux dernières hypothèses, le cône s devient, l'axe du plus grand ou du plus petit moment d'inertie, c'est-à-dire que l'axe instantané est fixé dans le corps et dans l'espace.

Il est *permanent ;* ce qui est une propriété évidente, puisque OX et OY sont des axes principaux d'inertie du point fixe ; OY la possède également, mais il diffère des deux autres axes, sous le rapport de la stabilité.

285. **Théorème.** — *Les axes du plus grand et du plus petit moment d'inertie sont des axes stables de rotation, l'axe du moment d'inertie moyen est instable.* Supposons la rotation initiale

dirigée suivant l'axe du plus grand moment d'inertie. La polhodie est le sommet correspondant de l'ellipsoïde et l'axe de la rotation est stable. En effet le mouvement produit se rapporte à l'hypothèse $G^2 - 2TA = 0$. Si nous écartons l'axe de la rotation de sa position, nous aurons nécessairement $G^2 - 2TA < 0$, mais $G^2 - 2TA$ étant plus petit que $G^2 - 2TB$, le déplacement peut être assez faible pour que $G^2 - 2TB$ reste plus grand que zéro. Dans ces conditions le cône s entoure l'axe du plus grand moment d'inertie, mais il en diffère aussi peu qu'on le veut. La polhodie est donc une courbe fermée, très petite, qui entoure le sommet du grand axe et il y a stabilité.

Un raisonnement analogue s'applique à l'axe du plus petit moment d'inertie et conduit à la même conclusion. Les axes du plus grand et du plus petit moment d'inertie sont des axes stables de rotation.

Il n'en est plus de même pour l'axe moyen. Si l'on imprime une rotation initiale autour de celui-ci on a $G^2 - 2TB = 0$, mais cette relation n'existe plus dès que l'axe de rotation est écarté et on a, soit $G^2 - 2TB > 0$, soit $G^2 - 2TB < 0$. Dans le premier cas la polhodie est une courbe fermée qui entoure l'axe du plus grand moment d'inertie ; dans le second, elle entoure l'axe du plus petit moment d'inertie ; quelle que soit l'hypothèse, l'axe de la rotation bascule en décrivant une courbe de grande dimension et l'équilibre est instable.

286. Cas particulier où l'ellipsoïde d'inertie est de révolution. — Lorsque $A = B$, l'ellipsoïde d'inertie du corps solide relativement au point fixe et le cône s deviennent de révolution autour de l'axe des z. Ils ont pour équations :

$$A(x^2 + y^2) + Cz^2 = 1,$$
$$A(G^2 - 2TA)(x^2 + y^2) + C(G^2 - 2TC)z^2 = 0.$$

La polhodie est un parallèle de l'ellipsoïde ; l'herpolhodie se réduit à une circonférence, car le cône S est de révolution autour de $\overline{OG}$, puisque la génératrice a une longueur constante (*Fig.* 103).

Le mouvement du solide résulte donc du roulement uniforme du cône s sur le cône S. Dans ce mouvement les axes OI, OG, OZ sont dans le même plan méridien perpendiculaire au plan invariable.

Mais pendant que le cône *s* roule sur le cône S, l'axe OZ décrit autour de OG un cône droit dont l'angle au sommet est GOZ. Ce mouvement est dit *de précession* autour de OG, et sa vitesse angulaire est constante. On le prouve en décomposant la rotation instantanée OI suivant OG et OZ ; le parallélogramme ainsi formé reste toujours le même et la composante suivant OG est l'axe constant de la précession. On donne à la composante invariable suivant l'axe de figure, le nom de *rotation propre*.

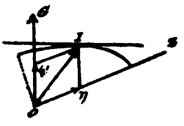


Fig. 103.

On peut encore supposer le solide relié invariablement à l'ellipsoïde d'inertie du point fixe, lequel est animé d'une rotation uniforme autour de son axe de figure, en même temps que ce dernier tourne d'un mouvement de précession uniforme autour de l'axe OG représentant le moment invariable des quantités de mouvement du corps par rapport au point fixe.

287. **Mouvement d'un corps solide homogène de révolution fixé par un point de son axe de figure.** — Les équations d'Euler, trouvées au n° 281, conviennent surtout, comme nous l'avons vu, au cas où les trois moments L, M, N sont nuls (nos 273, 282 à 286), ou bien encore au cas ou la rotation a lieu autour d'un axe principal d'inertie, en même temps que les forces extérieures se réduisent à un couple dont l'axe coïncide avec cet axe principal d'inertie (nos 274 et 275). Les déductions de ces deux derniers numéros sont comprises, en effet, dans les équations d'Euler.

Pour les autres cas, il y a avantage à évaluer les moments des forces extérieures par rapport à des axes qui ne suivent pas complètement le mouvement du corps, et souvent aussi, à exécuter en détail l'élimination de p, q, r entre les six équations (I) et (II) du n° 281.

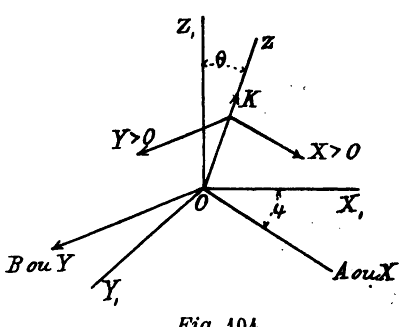


Fig. 104.

Cette élimination ne donne des résultats simples que si l'ellipsoïde est de révolution. C'est le seul cas que nous examinerons en détail.

Nous supposerons que l'axe de révolution soit l'axe OZ (*Fig.*104),

et que l'on ait par conséquent A = B, le troisième moment d'inertie C pouvant d'ailleurs être plus grand ou plus petit que les deux autres.

Considérons les moments P et Q des forces extérieures par rapport aux deux axes OA et OB (perpendiculaire à OA dans le plan des XY). On aura, en vertu de la figure 101 :

$$P = L \cos\varphi - M \sin\varphi, \quad Q = L \sin\varphi + M \cos\varphi,$$

et les équations d'Euler deviennent :

$$(1) \quad A\left(\cos\varphi \frac{dp}{dt} - \sin\varphi \frac{dq}{dt}\right) + (C - A) r (q \cos\varphi + p \sin\varphi) = P,$$

$$(2) \quad A\left(\sin\varphi \frac{dp}{dt} + \cos\varphi \frac{dq}{dt}\right) + (C - A) r (q \sin\varphi - p \cos\varphi) = Q,$$

$$(3) \quad C \frac{dr}{dt} = N.$$

On remarque alors que les multiplicateurs de A s'expriment simplement en fonction des dérivées des multiplicateurs de $(C - A) r$ et que les deux premières équations peuvent prendre cette nouvelle forme :

$$(1) \quad -A \frac{d(q \sin\varphi - p \cos\varphi)}{dt}$$
$$+ (p \sin\varphi + q \cos\varphi) \left\{ A \frac{d\varphi}{dt} + (C - A) r \right\} = P,$$

$$(2) \quad A \frac{d(p \sin\varphi + q \cos\varphi)}{dt}$$
$$+ (q \sin\varphi - p \cos\varphi) \left\{ A \frac{d\varphi}{dt} + (C - A) r \right\} = Q.$$

Or, des équations (II) du n° 281, on tire

$$q \sin\varphi - p \cos\varphi = -\frac{d\theta}{dt}, \quad p \sin\varphi + q \cos\varphi = \sin\theta \frac{d\psi}{dt}$$
$$r = \frac{d\varphi}{dt} + \cos\theta \frac{d\psi}{dt}.$$

Portant ces valeurs dans les équations (1), (2), (3) et réduisant il vient :

$$A \frac{d^2\theta}{dt^2} + (C - A) \sin\theta \cos\theta \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + C \sin\theta \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\psi}{dt} = P,$$

$$A \sin\theta \frac{d^2\psi}{dt^2} + (2A - C) \cos\theta \frac{d\psi}{dt} \frac{d\theta}{dt} - C \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\theta}{dt} = Q,$$

$$C \frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt} + \cos\theta \frac{d\psi}{dt}\right) = N.$$

Ce sont les équations générales du mouvement d'un corps solide pourvu d'un point fixe et dont l'ellipsoïde d'inertie, pour ce point, est de révolution ; en particulier, ce sont celles d'un corps de révolution homogène, pourvu que le point fixe soit sur l'axe. Les moments P, Q, N sont pris respectivement par rapport à OA (ou OX), OB (ou OY), et à l'axe des Z.

Le corps est animé, comme nous l'avons déjà dit, de trois vitesses angulaires simultanées $\frac{d\varphi}{dt}$, $\frac{d\psi}{dt}$, $\frac{d\theta}{dt}$, autour des axes respectifs OZ, OZ_1, OA ; mais dans le cas d'un corps de révolution, on leur a donné des noms : la *rotation propre* $\frac{d\varphi}{dt}$ autour de OZ, la *précession* $\frac{d\psi}{dt}$ autour de l'axe fixe OZ_1, la *nutation* $\frac{d\theta}{dt}$ autour de l'axe mobile OA, perpendiculaire au plan ZZ_1.

Cette décomposition de la rotation totale n'a rien d'absolu, car à l'origine du mouvement, l'axe de figure et l'axe instantané de rotation étaient seuls déterminés ; l'axe fixe des Z_1, pouvait être choisi arbitrairement.

288. **Problème.** — *On donne un corps solide homogène de révolution, fixé par un point de son axe de figure, autour duquel il est animé d'une rotation initiale énergique, et qui est soumis à l'action d'une force extérieure dont le point d'application est sur l'axe. On demande le mouvement* (*Fig.* 104).

Soient X, Y, Z les composantes de la force suivant les axes OX, OY, OZ ; a la distance du point d'application au point fixe. Dans les équation finales du n° 287 remplaçons les seconds membres par $-aY$, aX et 0. De la dernière équation on tire alors :

$$(3)\quad \frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt}\cos\theta = C^{te} = k.$$

En éliminant $\frac{d\varphi}{dt}$ dans les autres équations et mettant ψ' et θ' pour $\frac{d\psi}{dt}$ et $\frac{d\theta}{dt}$, ces équations deviennent :

$$(1)\quad A\frac{d\theta'}{dt} + Ck\psi'\sin\theta - A\psi'^2\sin\theta\cos\theta = -aY,$$

$$(2)\quad A\frac{d\psi'}{dt}\sin\theta + 2A\psi'\theta'\cos\theta - Ck\theta' = aX.$$

Elles ne peuvent pas encore être résolues, à moins de supposer que les termes en $\frac{d\theta'}{dt}$, $\frac{d\psi'}{dt}$, ψ'^2 et $\psi'\theta'$ soient négligeables, au pre-

mier membre, à côté des autres termes, lesquels renferment le facteur Ck (qui est très grand, puisque k est la valeur initiale de la rotation énergique imprimée au corps autour de l'axe de figure). Dans cette hypothèse, les équations donnent :

$$(A)\ \psi' = -\frac{aY}{Ck \sin\theta}, \quad \theta' = -\frac{aX}{Ck}.$$

Pour nous rendre compte des mouvements qui se produisent, admettons $a > 0$ et supposons d'abord la force agissante parallèle à OX (OA) et ensuite parallèle à OY (OB) ; en d'autres termes, elle serait située dans le plan XZ ou YZ, car la composante suivant l'axe OZ est détruite par le point fixe.

1er cas. La force est parallèle à l'axe OX, donc $Y = 0$, ψ' ou $\frac{d\psi}{dt} = 0$. Ainsi ψ est constant et OX a une direction invariable. Il faut admettre dès lors que la force X est aussi sensiblement constante en grandeur, sans cela θ' serait variable et $\frac{d\theta'}{dt}$ ne serait pas nul, contrairement aux hypothèses. La valeur de θ' montre alors que, outre la rotation propre, le corps a un mouvement uniforme de nutation autour de OX, dans le sens nécessaire pour amener l'axe OZ vers OY positif si X est positif. Or si le corps n'avait pas de rotation propre initiale, la force X positive le ferait tourner autour de OY positif. D'un autre côté la direction OX est *a priori* quelconque, puisque l'on peut régler en conséquence les axes Y et Z_1. De là le théorème suivant :

Lorsqu'un solide de révolution, fixé par un point de son axe, tourne avec une grande rapidité autour de cet axe, si l'on applique sur celui-ci une force dont la composante normale est de direction constante, la rotation que cette force déterminerait sur le solide au repos ne se produit pas, mais l'axe de figure du solide se porte par le plus court chemin, c'est-à-dire par un mouvement plan, vers l'axe de la rotation que la force tend à produire, comme si les deux rotations tendaient à se faire autour d'une même droite et dans le même sens. C'est là ce qu'on nomme la tendance au parallélisme des axes de rotation.

2e cas. La force est parallèle à l'axe OY, donc $X = 0$, θ' ou $\frac{d\theta}{dt} = 0$. Ainsi θ est constant et l'axe OZ décrit un cône droit autour de OZ_1 avec la vitesse angulaire $\frac{-aY}{Ck \sin\theta}$, où il faut supposer Y sensiblement constant en grandeur, puisque $\frac{d\psi'}{dt}$ est par hypo-

thèse très petit. Mais ici l'axe OY n'est pas constant en direction : il tourne avec OZ, puisqu'il est toujours perpendiculaire à OZ dans le plan OZZ_1. La force appliquée tourne donc avec le corps et rencontre constamment l'axe fixe OZ_1, au lieu de rester constante en direction ; *c'est pour cela que ce cas n'est pas compris dans le précédent* qui en est un cas limite, puisqu'une force de direction constante rencontre à l'infini, la parallèle menée par le point fixe.

La valeur de ψ' montre alors que, outre la rotation propre, le corps a un mouvement uniforme de précession autour de OZ_1. Le mouvement de l'axe OZ est conique au lieu d'être plan. Cependant la coïncidence des deux cas existe encore quand on considère le mouvement pendant un seul instant. Alors OZ tourne aussi bien autour de OY que de OZ_1, puisque ces trois droites sont dans un même plan et nous constatons encore la tendance au parallélisme. En effet si le corps ne tournait pas sur son axe, la force dirigée suivant les Y positifs le ferait tourner autour des X négatifs. Or c'est aussi de ce côté que l'axe OZ marche dans sa rotation autour de OZ_1 ou de OY (OB).

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Lorsqu'un solide de révolution, fixé par un point de son axe, tourne avec une grande rapidité autour de cet axe, si l'on applique sur celui-ci une force dont la composante normale rencontre constamment un axe fixe, la rotation que cette force déterminerait sur le solide au repos ne se produit pas, mais l'axe de figure du solide prend un mouvement conique autour de l'axe fixe, et ce mouvement a lieu à chaque instant par le plus court chemin vers l'axe de la rotation que la force tend à produire, conformément au principe de la tendance au parallélisme.

Il est à remarquer que les équations (A) ont été obtenues par un raisonnement qui ne peut pas être valable pendant toute la durée du mouvement, notamment au début. On admet, en effet, que ψ' et θ', c'est-à-dire $\frac{d\psi}{dt}$ et $\frac{d\theta}{dt}$ sont sensiblement constants. Or *à l'origine ils sont nuls.* Mais il peut arriver qu'il y ait une période moyenne du mouvement pendant laquelle les hypothèses sont admissibles.

289. On peut le vérifier expérimentalement au moyen de divers instruments, tels que l'appareil de Bohnenberger, le culbuteur de Hardy, etc.

Le premier comprend un tore massif en bronze muni d'une suspension à la Cardan qui rend le centre de gravité fixe et permet à l'axe de prendre toutes les orientations (*Fig.* 105). Dans cette figure, où les deux anneaux sont perpendiculaires au plan du papier OZZ_1Y, l'anneau vertical ne peut tourner qu'autour de l'axe fixe OZ_1. Il est relié à l'anneau incliné par son diamètre OX, perpendiculaire au plan du papier, autour duquel l'anneau incliné peut tourner, en même temps qu'il peut suivre la rotation autour de OZ_1. OZ est un diamètre de l'anneau incliné, perpendiculaire à OX, et autour duquel tourne le tore, dont OZ est l'axe de figure, de manière que le tore peut prendre les trois rotations (OZ, OX, OZ_1). L'axe OY, qui n'est pas un axe de rotation dans l'instrument, est normal au plan de l'anneau incliné. L'appareil réalise donc le système des trois axes OZ, OX, OY décrit précédemment.

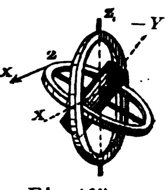


Fig. 105.

Cela posé, agissons sur l'axe OZ au point Z.

1° Parallèlement à l'axe des X, donc tangentiellement à l'anneau dans le sens de la flèche. Si le corps n'a pas de rotation, il en prendra une autour des Y positifs. S'il a une rotation énergique sur son axe, on verra celui-ci tourner autour de l'axe des X, de manière à se rapprocher des Y positifs (nutation). Ce mouvement permet à la force de rester constante en direction.

2° Parallèlement à l'axe des Y positifs, donc perpendiculairement à l'anneau et vers le bas. Si le corps n'a pas de rotation, il en prendra une autour des X négatifs. S'il a une rotation énergique sur son axe, on verra celui-ci tourner autour de l'axe OZ_1 de manière à se rapprocher des X négatifs (précession). Ce mouvement ne permet pas à la force de rester constante en direction, mais elle rencontre constamment l'axe fixe.

Il peut sembler singulier qu'une théorie aussi défectueuse, s'accorde avec l'expérience. Cela dépend de ce qu'elle est susceptible d'une interprétation physique qui la rend exacte. Les propriétés que l'on attribue dans le calcul précédent à l'axe de figure, appartiennent, rigoureusement cette fois, à l'axe du couple résultant des quantités de mouvement, que certains auteurs appellent *axe d'impulsion*. Or si la rotation initiale autour de l'axe de figure a été très énergique, cet axe ne pourra jamais s'écarter beaucoup de l'axe d'impulsion, et c'est pour cela que, dans une

expérience de courte durée, l'axe de figure paraît obéir lui-même aux lois trouvées (1).

290. Problème. — ***Mouvement d'un solide homogène de révolution fixé par un point de son axe de figure et soumis à la seule action de son poids*** (*Fig.* 106)

Soient a la distance du centre de gravité au point fixe, P le poids du corps. Nous prenons l'axe fixe OZ_1 dirigé suivant la verticale; l'équation (3) du n° 288 ne change pas. Nous la conservons par suite de sa simplicité, mais nous substituons aux deux autres, les relations suivantes :

1° *L'intégrale de la force vive;* or, la force vive s'obtient par la formule $Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$ (278) dans laquelle :

$$A = B, \quad p = \theta', \quad q = \psi' \sin\theta, \quad r = \varphi' + \psi' \cos\theta = k.$$

La variation de la demi force vive, de l'époque initiale pour laquelle nous supposerons $\theta' = 0$, $\psi' = 0$, jusqu'à l'époque t est donc :

$$\frac{1}{2}\left\{ A\,(\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2\theta) + Ck^2 \right\} - \frac{1}{2}\,Ck^2 \text{ ou } \frac{1}{2}\,A\,(\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2\theta).$$

En raison de l'indéformabilité du solide (218), le second membre de l'équation ne renferme que le travail du poids P dans les trois mouvements composants. Or le centre de gravité est immobile dans la rotation propre et il ne reçoit de la précession qu'une vitesse horizontale. Le travail développé par le poids provient donc de la nutation. Il a pour expression :

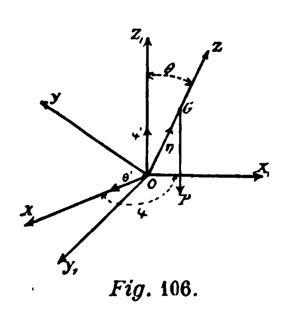


Fig. 106.

$$\int_{\theta_0}^{\theta} Pa \sin\theta \, d\theta = Pa\,(\cos\theta_0 - \cos\theta).$$

D'où l'intégrale :

$$A\,(\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2\theta) = 2\,Pa\,(\cos\theta_0 - \cos\theta).$$

(1) De Tilly, *Note sur la similitude mécanique et en général sur le mouvement d'un corps de révolution. Bull. de l'Ac. R. de B.*, 2e série, t. XXXVII, 1874. — *Balistique*, 1875. — *Sur diverses questions de balistique*, 1876. — *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux :* 1re série, t. IX ; 2e série, t. II et III.

Comte de Sparre, *Bulletin de la Société de statistique de l'Isère*, 1875.

2° *Le principe du moment résultant des quantités de mouvement par rapport à l'axe* OZ_1. Nous savons que $M_{z_1}P$ est nul puisque P est parallèle à OZ_1, donc $\Sigma M_{z_1}mv$ est constant. Il vaut d'ailleurs la somme des projections de $\Sigma M_x mv$, $\Sigma M_y mv$, $\Sigma M_z mv$ sur OZ_1 puisque :

$$\overline{\Sigma M_o mv} = \overline{\Sigma M_x mv} + \overline{\Sigma M_y mv} + \overline{\Sigma M_z mv} \quad (14).$$

Ces moments composants ont pour valeurs : $A\theta'$, $A\psi' \sin\theta$, Ck (277) et les cosinus des angles qu'ils forment avec OZ_1 sont : 0, $\sin\theta$, $\cos\theta$, donc

$$A\psi' \sin^2\theta + Ck \cos\theta = C^{te}.$$

Admettons à l'époque initiale $\psi' = 0$, $\theta = \theta_o$, la constante vaut $Ck \cos\theta_o$. De là les trois équations :

$$(1) \quad A(\theta'^2 + \psi'^2 \sin^2\theta) = 2Pa(\cos\theta_o - \cos\theta),$$
$$(2) \quad A\psi' \sin^2\theta = Ck(\cos\theta_o - \cos\theta),$$
$$(3) \quad (\varphi' + \psi' \cos\theta) = k.$$

Elles sont du premier ordre et déterminent θ, ψ, φ en fonction du temps et de trois constantes arbitraires d'intégration. Il est facile de vérifier que les deux premières satisfont aux équations différentielles du n° 288, pourvu que l'on remplace les seconds membres de celle-ci par $Pa \sin\theta$ et 0.

Le premier membre de l'équation (1) étant positif, a et $(\cos\theta_o - \cos\theta)$ ont le même signe. Prenons la partie positive OZ de l'axe de figure de façon que $\theta_o < 90°$; dans ces conditions le centre de gravité est à l'instant initial au-dessus du point fixe, lorsque a est positif. Alors :

$$\cos\theta_o - \cos\theta > 0 \text{ ou } \theta > \theta_o,$$

et l'axe de figure fait avec la verticale OZ_1 un angle constamment plus grand que l'angle initial.

Mais l'équation (2) montre que ψ' et $k(\cos\theta_o - \cos\theta)$ ont le même signe et comme à une valeur positive de a, correspond une valeur positive de $(\cos\theta_o - \cos\theta)$, ψ' et k ont le même signe et le même sens. Les conclusions seraient inverses pour a négatif. *Il s'ensuit que la précession se fait dans le sens de la rotation propre ou en sens opposé, suivant que le centre de gravité est plus haut ou plus bas que le point fixe, à l'instant initial.*

L'équation (2) prouve que ψ' dépend uniquement de θ. Éliminons cette vitesse angulaire, en multipliant la première équation par A $\sin^2\theta$, puis en élevant la seconde au carré, et enfin en soustrayant celle-ci de la précédente, ce qui donne :

$$(1) \quad \theta'^2 = \frac{2Pa}{A}(\cos\theta_0 - \cos\theta) - \frac{C^2k^2}{A^2}\left(\frac{\cos\theta_0 - \cos\theta}{\sin\theta}\right)^2.$$

Le premier membre étant essentiellement positif, les valeurs limites de θ s'obtiennent en égalant le second membre à zéro. De là, deux équations : $\cos\theta_0 - \cos\theta = 0$,

$$\frac{2Pa}{A}\sin^2\theta - \frac{C^2k^2}{A^2}(\cos\theta_0 - \cos\theta) = 0 \text{ ou } \varphi(\theta) = 0.$$

Une première solution est $\theta = \theta_0$; pour déterminer les autres, séparons les racines de l'équation $\varphi(\theta) = 0$, par la méthode du nº 176 ; il vient :

$$\cos\theta = -1, \quad \varphi(\theta) = -\frac{C^2k^2}{A^2}(1 + \cos\theta_0),$$

$$\cos\theta = \cos\theta_0, \quad \varphi(\theta) = \frac{2Pa}{A}\sin^2\theta_0,$$

$$\cos\theta = +1, \quad \varphi(\theta) = \frac{C^2k^2}{A^2}(1 - \cos\theta_0).$$

Une seule valeur de θ est admissible; elle est comprise entre θ_0 et 180°, nous l'appelons θ_1. Les angles θ_0 et θ_1, limitent la ***nutation***, et ainsi qu'au nº 176, le mouvement de l'axe de figure se compose d'oscillations isochrones, d'amplitude $\theta_1 - \theta_0$, qui se font dans le plan vertical ZOZ_1 ; celui-ci possède autour de l'axe vertical OZ_1 un mouvement de précession dont la vitesse angulaire, uniquement fonction de θ, s'annule pour $\theta = \theta_0$, atteint son maximum pour $\theta = \theta_1$ et reste toujours de même signe que k. *La précession autour de la verticale du point fixe se fait donc avec une vitesse angulaire périodiquement variable et dans un sens constant.*

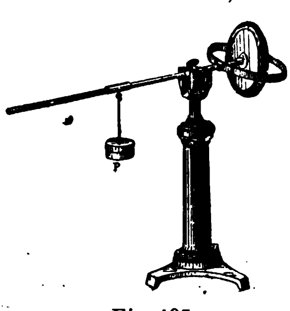


Fig. 107.

Cas particulier où la rotation initiale est énergique. Le premier membre de l'équation (1) est positif, mais le coefficient $\frac{C^2k^2}{A^2}$, très grand par suite

du facteur k^2, entre dans un terme du second membre nécessairement négatif. On en conclut que $\frac{\cos\theta_0 - \cos\theta}{\sin\theta}$ reste très petit et θ diffère peu de θ_0. Or, ψ' étant uniquement fonction de θ, la précession devient uniforme et l'axe de figure décrit un cône droit autour de la verticale du point fixe (fig. 106). C'est ce que l'on démontre par la balance gyroscopique, dans laquelle un contre-poids mobile permet de faire varier à volonté la position du centre de gravité (*Fig.* 107). Si dans ces conditions, l'on imprime au tore un mouvement de rotation énergique autour de son axe de figure, on peut observer les phénomènes que nous venons d'indiquer.

§ 3. *Mouvement du corps solide libre.*

291. La méthode exposée au n° 271, nous permet de donner la règle suivante : ***Le mouvement du solide libre est résultant de deux mouvements simultanés : 1° une translation définie par le mouvement du centre de gravité rapporté à trois axes rectangulaires fixes ; 2° une rotation autour du centre de gravité, pris pour origine de trois axes rectangulaires parallèles aux axes fixes. Ce mouvement, qui est relatif au système mobile considéré, s'obtient par les équations du mouvement du corps solide possédant un point fixe* (281), *sans intervention des forces fictives.***

Soient $O_1X_1Y_1Z_1$ les axes fixes, OXYZ les axes principaux d'inertie du corps par rapport à ce point. Le théorème du centre de gravité donne les trois équations :

$$\text{(III)} \left\{ M \frac{d^2x_1}{dt^2} = \Sigma X_{1e}, \quad M \frac{d^2y_1}{dt^2} = \Sigma Y_{1e}, \quad M \frac{d^2z_1}{dt^2} = \Sigma Z_{1e}, \right.$$

X_{1e}, Y_{1e}, Z_{1e}, étant les composantes d'une force extérieure suivant les axes fixes.

Le mouvement autour du centre de gravité résulte des équations (I) et (II) du n° 281, dans lesquelles L, M, N sont les moments résultants des forces extérieures, par rapport aux axes principaux d'inertie du centre de gravité. Nous avons donc neuf équations différentielles simultanées du second ordre, pour déterminer x_1, y_1, z_1, p, q, r, φ, ψ, θ.

Généralement elles s'intègrent simultanément, car les forces dépendent de la position du solide dans l'espace. Le problème, analytiquement très compliqué, se simplifie lorsque les forces

sont exclusivement fonctions du temps et de la position du centre de gravité. Alors les équations (III) considérées isolément, donnent le mouvement du centre de gravité et la translation. Les équations du n° 281 font ensuite connaître φ, ψ, θ, p, q, r, ou la rotation.

Remarquons aussi que ΣX_1, ΣY_1, ΣZ_1 sont les projections de la résultante des forces extérieures sur OX_1, OY_1, OX_1 et ΣL, ΣM, ΣN les projections du moment résultant des mêmes forces par rapport au centre de gravité, c'est-à-dire de l'axe du couple de transport par rapport à ce point. La translation dépend donc uniquement de la résultante des forces extérieures, tandis que la rotation est produite par le couple de transport de ces forces par rapport au centre de gravité.

292. **Problème.** — *Mouvement du solide libre qui n'est soumis à aucune force extérieure.* Les équations se simplifient par la disparition de ΣX_1, ΣY_1, ΣZ_1, ΣL, ΣM, ΣN. Dans ces conditions les équations (III) prouvent que le mouvement du centre de gravité et par conséquent la translation sont rectilignes et uniformes.

Les équations (I) et (II) du n° 281 deviennent les équations du mouvement d'un corps solide possédant un point fixe, qui n'est soumis à aucune force extérieure. La rotation autour du centre de gravité, se fait donc suivant les lois de Poinsot.

293. **Mouvement d'un corps solide pesant dans le vide.** — La seule force extérieure est le poids du corps et les équations (III) représentent le mouvement d'un point matériel pesant, lancé dans le vide suivant une direction donnée (159). La translation est donc déterminée. La rotation se fait d'après les lois de Poinsot, puisque le moment résultant des actions de la pesanteur par rapport au centre de gravité est nul.

Si le corps solide est une sphère homogène, l'axe instantané de la rotation devient un axe naturel de rotation, car tous les diamètres sont principaux d'inertie, relativement au centre de gravité (275). Le mouvement de la sphère se représente donc par une rotation uniforme, autour d'un diamètre animé de la translation qui vient d'être déterminée.

§ 4. *Statique du corps solide qui n'est pas libre*

294. Méthode générale. — Nous remplacerons les obstacles auxquels le corps est soumis. par les réactions qu'ils produisent, de manière à ramener le problème à la recherche des conditions de l'équilibre d'un solide libre. On le résout au moyen des six équations fondamentales du nº 228, dont nous tirerons les réactions. Les équations qui seront disponibles après l'élimination de ces inconnues, exprimeront les conditions auxquelles les forces directement appliquées devront satisfaire *a priori,* pour que l'équilibre soit possible. Ce sont des *équations de condition.*

295. Équilibre du corps solide possédant un point fixe. — Prenons le point fixe pour origine des axes rectangulaires OXYZ et conservons les notations habituelles pour les forces directement appliquées. Soient P, Q, R les composantes de la réaction du point fixe. Nous aurons pour le solide rendu libre, les six équations :

$$(1)\ \Sigma X + P = 0,\quad (2)\ \Sigma Y + Q = 0,\quad (3)\ \Sigma Z + R = 0,$$
$$(4)\ \Sigma L = 0,\quad (5)\ \Sigma M = 0,\quad (6)\ \Sigma N = 0.$$

Les trois premières font connaître les composantes de la réaction et montrent que cette force est égale et contraire à la résultante des forces directement appliquées. Par le fait même nous obtenons la pression subie par l'appui. En mécanique rationnelle on admet que la résistance de ce dernier est illimitée, mais en pratique, il y a dans chaque cas particulier, une limite que l'on ne peut dépasser.

Les trois dernières équations, indépendantes de la réaction, donnent les conditions d'équilibre. Elles expriment que le moment résultant des forces directement appliquées par rapport au point fixe est nul. Or, la relation

$$\Sigma X \Sigma L + \Sigma Y \Sigma M + \Sigma Z \Sigma N = 0,$$

étant vérifiée par le fait des équations (4), (5) et (6), les forces directement appliquées ont une résultante unique équivalente, passant par l'appui (235).

296. Équilibre d'un corps solide possédant un axe fixe. — Soient O, O', les appuis de l'axe, P, Q, R, P', Q', R', les compo-

santes de leurs réactions. Le corps solide étant rendu libre, nous aurons les six équations d'équilibre, que nous formerons en prenant la droite 00′, pour axe des z et en plaçant l'origine au point 0. Il vient :

$$\Sigma X + P + P' = 0, \quad \Sigma Y + Q + Q' = 0,$$
$$\Sigma Z + R + R' = 0,$$
$$\Sigma L - Q'h = 0, \quad \Sigma M + P'h = 0, \quad \Sigma N = 0.$$

La dernière équation, indépendante des réactions, est la condition d'équilibre. En conséquence *un corps solide possédant un axe fixe est en équilibre quand le moment résultant des forces directement appliquées par rapport à l'axe fixe est nul.*

Cette condition est suffisante. Les autres équations servent au calcul des réactions et nous aurions à faire valoir ici les considérations déjà présentées au n° 272.

297. Équilibre du solide reposant sur un plan *(Fig.* 108). — Le corps solide repose sur un plan indéformable, avec lequel il a plusieurs points de contact M_1, M_2... Nous prendrons ce plan pour plan des XY ; l'axe OZ, qui lui est perpendiculaire, est positif du côté où se trouve le solide. Celui-ci est rendu libre par les réactions normales $\bar{R}_1$, $\bar{R}_2$,... des points de contact. Toutes ces forces parallèles, ont une résultante unique équivalente $\bar{R}$, qui passe par un point du plan dont les coordonnées inconnues sont x et y. Les six équations d'équilibre deviennent donc :

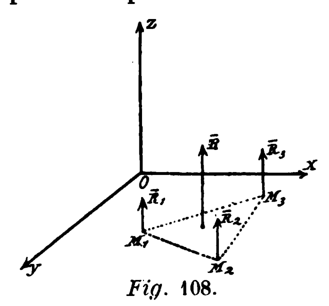


Fig. 108.

$$(1)\ \Sigma X = 0, \quad (2)\ \Sigma Y = 0, \quad (3)\ \Sigma Z + R = 0,$$
$$(4)\ \Sigma L + Ry = 0, \quad (5)\ \Sigma M - Rx = 0, \quad (6)\ \Sigma N = 0.$$

Les équations (4) et (5) déterminent les coordonnées du point d'application de la réaction totale ; en vertu de la théorie des forces parallèles (236), ce point doit se trouver dans l'intérieur du polygone convexe qui renferme tous les points de contact et que l'on nomme le *polygone d'appui.*

Enfin les équations (1), (2), (6), indépendantes des réactions, sont les équations de condition. Elles satisfont à la relation :

$$\Sigma X \Sigma L + \Sigma Y \Sigma M + \Sigma Z \Sigma N = 0. \quad (235)$$

Donc l'équilibre d'un corps solide reposant sur un plan indéformable exige que les forces directement appliquées aient une résultante équivalente, normale au plan, tendant à appuyer le corps sur celui-ci, et telle que sa ligne d'action passe dans l'intérieur du polygone d'appui. Nous calculerons les réactions particulières des points de contact au moyen des équations (3), (4), (5), dans lesquelles nous tiendrons compte que R est résultante des réactions normales développées aux points de contact M_1, M_2 ... etc., dont les coordonnées sont connues. Il en résulte :

$$R_1 + R_2 + R_3 \ldots = -\Sigma Z,$$
$$R_1 x_1 + R_2 x_2 + \ldots = \Sigma M, \quad R_1 y_1 + R_2 y_2 + \ldots = -\Sigma L.$$

Ces trois équations seules contiennent les inconnues R_1, R_2, ... aussi les réactions sont-elles indéterminées du moment que le nombre des points de contact dépasse trois. Cette indétermination existe en fait, dès que les trois points sont en ligne droite car si nous prenons celle-ci pour axe des x, nous avons alors les quatre équations de condition, $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma L = 0$, $\Sigma N = 0$.

Elles expriment que les forces directement appliquées ont une résultante unique équivalente, normale au plan, tendant à appuyer le corps sur celui-ci et telle que sa ligne d'action rencontre la ligne des points d'appui.

En réalité les réactions des points de contact sont déterminées, lorsqu'on passe aux corps naturels, mais à la condition de faire intervenir des équations nouvelles, qui représentent analytiquement les déformations subies par le plan aux points de contact.

CHAPITRE XXVI

MÉCANIQUE DES SYSTÈMES DE FIGURE VARIABLE

298. **Méthode générale.** — Ces systèmes sont formés de corps solides indéformables, réunis par des liaisons qui permettent à la figure de varier. Généralement on *donne l'état initial du système, les forces qui le sollicitent, et on demande sa position à un instant quelconque.*

La méthode des réactions, plus simple que le théorème des vitesses virtuelles, convient mieux aux systèmes composés de solides naturels et sera appliquée. Elle consiste à décomposer le *système en parties indéformables, que l'on isole ensuite en remplaçant les liaisons par des forces de liaison et les obstacles par des réactions. On établit alors les équations du mouvement des solides rendus libres, en tenant compte des conditions nécessaires au fonctionnement des liaisons, ce qui crée entre les vitesses, des relations qui seront jointes aux précédentes.* Entre toutes les équations ainsi obtenues, l'élimination des forces de liaison et de réaction laisse des équations qui déterminent les lois du mouvement. Généralement les liaisons sont constituées par des tiges, des fils ou des surfaces.

Rappelons qu'une barre droite, rigide, de section et de masses négligeables et qui n'est soumise à aucune force intermédiaire, développe sur les points qu'elle réunit, des *tractions* ou des *pressions*, qui sont directement opposées, dirigées suivant la tige et égales entre elles (n° 207).

De même un fil parfaitement flexible, inextensible et de section négligeable, développe sur les corps qu'il réunit, des *tensions* qui ont la direction du fil et sont dirigées vers l'intérieur de celui-ci. Les réactions égales et contraires du corps sur le fil, tendent à allonger ce dernier.

Enfin lorsqu'il y a contact entre deux surfaces, elles engendrent des réactions, dirigées suivant la normale commune, si l'on fait abstraction du frottement. Le sens de chacune de ces forces est déterminé, quand les surfaces ne résistent qu'à la pénétration. L'action $\overline{N}$ de S_1 sur S (*Fig.* 109) tend alors à repousser celle-ci, et réciproquement quant à la réaction $\overline{N}_1 = (-\overline{N})$, de S sur S_1.

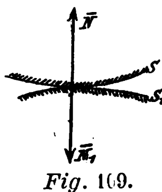


Fig. 109.

299. Problème. — *On donne un treuil, composé de deux cylindres homogènes sur lesquels sont enroulés deux cordages supportant les poids* P *et* P′ *disposés comme l'indique la fig.* (110). *On demande la loi du mouvement.*

Nous négligerons les frottements, la raideur et la masse des cordages. Le système est à figure variable. Ses parties indéformables sont le treuil et les deux poids $\overline{P}$ et $\overline{P'}$; les liaisons formées par les cordages développent les tensions $\overline{T}$, $\overline{T}'$. Soient $\overline{Q}$ le poids

du treuil; v, v' les vitesses des poids P et P'; r, r' les rayons des tambours; R le rayon de giration du treuil par rapport à son axe.

Le treuil isolé est en réalité un solide possédant un axe fixe O et qui est soumis aux tensions T et T' ainsi qu'au poids Q. Son mouvement se détermine par l'équation

$$(1)\quad \frac{Q}{g} R^2 \frac{d\omega}{dt} = T'r' - Tr \quad (272).$$

Les poids sont des solides auxquels sont appliqués les forces T, P, T', P'. Ils possèdent un mouvement de translation vertical, que l'on peut obtenir par le principe des quantités de mouvement projetées sur la verticale, considérée positivement dans le sens de g. Il vient :

Fig. 110.

$$\frac{d}{dt}\,\Sigma mv' = P' - T' \text{ ou } (2)\quad M\frac{dv'}{dt} = \frac{P'}{g}\frac{dv'}{dt} = P' - T',$$

$$-\frac{d}{dt}\,\Sigma mv = -T + P \text{ ou } (3)\quad \frac{P}{g}\frac{dv}{dt} = T - P.$$

Mais de l'inextensibilité des cordages, résultent les relations :

$$(4)\quad r'\omega = v', \qquad (5)\quad r\omega = v;$$

de là cinq équations pour cinq inconnues : T, T', ω, v, v'. En remplaçant $\frac{dv'}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$ tirées de (4) et (5) en fonction de ω, dans les équations (2) et (3), on a :

$$T' = P'\left(1 - \frac{r'}{g}\frac{d\omega}{dt}\right), \quad T = P\left(1 + \frac{r}{g}\frac{d\omega}{dt}\right).$$

Reportons ces valeurs dans l'équation (1), il vient après réduction :

$$\frac{d\omega}{dt} = g\,\frac{P'r' - Pr}{Pr^2 + P'r'^2 + QR^2}.$$

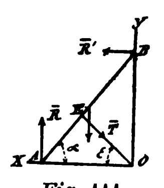
Le mouvement est donc uniformément accéléré. On fait une application de ce résultat dans la machine d'Atwood.

Remarque. — La tension est constante dans chaque cordage, parce que nous ne tenons pas compte de sa masse. Dès que celle-ci intervient, la tension varie avec le point que l'on considère.

300. Statique des systèmes de figure variable. — La méthode exposée au nº 298, donne lieu, pour l'équilibre, à la règle suivante : *On décompose le système en ses parties indéformables, que l'on isole ensuite en remplaçant les liaisons par des forces convenables et les obstacles par des réactions. On établit alors les six équations d'équilibre des solides libres en tenant compte des conditions nécessaires au fonctionnement des liaisons. L'élimination des forces de liaison et de réaction entre toutes les équations, laisse généralement des équations dites de condition, auxquelles les forces directement appliquées et les données du problème, doivent satisfaire pour que l'équilibre soit possible.*

Les six équations $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = 0$, $\Sigma L = 0$, $\Sigma M = 0$, $\Sigma N = 0$ (228) où entrent les forces directement appliquées, existent encore, parce que le système peut être considéré comme solidifié pendant l'équilibre, mais elles sont insuffisantes. Il faut les remplacer par les équations qui expriment l'indéformabilité des parties.

301. Problème. — (*Fig.* 111). *On donne une tige homogène pesante qui appuie son extrémité inférieure A sur un plan horizontal et son extrémité supérieure sur un plan vertical. Le plan vertical des* XY *passant par la tige, est perpendiculaire à l'intersection commune des deux premiers plans et coupe cette droite en un point* O *auquel le point* E *de la tige est relié par un fil sans masse qui maintient l'équilibre. On demande la tension du fil et les conditions de l'équilibre en admettant les surfaces sans frottement.*


Fig. 111.

Soient AB la position d'équilibre de la tige, α l'angle BAO qui la détermine; $2a$ la longueur de la tige ; ε l'angle correspondant du fil avec OA, P le poids. Pour isoler la barre, il faut remplacer le plan horizontal par sa réaction normale $\overline{R}$, le plan vertical par la réaction normale $\overline{R'}$ et substituer au fil sa tension $\overline{T}$. Dès lors la barre devient un solide libre en équilibre, soumis aux forces $\overline{R}$, $\overline{R'}$, $\overline{T}$, $\overline{P}$, situées dans le plan vertical des XY. Nous dirigeons l'axe des x suivant OA, l'axe des y suivant OB et nous avons les trois équations d'équilibre indiquées au nº 229 qui deviennent :

$$(1) \quad R' - T \cos \varepsilon = 0,$$

$$(2) \quad R - P - T \sin \varepsilon = 0,$$

$$(3) \quad R'2a \sin \alpha + Pa \cos \alpha - 2aR \cos \alpha = 0.$$

Elles déterminent les inconnues R, R′, T. Éliminons R et R′ de l'équation (3) au moyen des valeurs tirées des deux premières, il vient :

$$T = P \frac{\cos \alpha}{2 \sin (\alpha - \varepsilon)}.$$

Si dans cette formule on fait $\varepsilon = \alpha$, on trouve $T = \infty$ et l'équilibre est impossible ; pour $\varepsilon > \alpha$, il vient $T < 0$ et l'équilibre est encore impossible, car on a attribué à T le sens qui convient au fonctionnement du fil ; enfin pour $\varepsilon < \alpha$, $T > 0$, et l'équilibre est possible.

302. **Du polygone funiculaire.** — On appelle *polygone funiculaire* un polygone dont les sommets sont des points matériels soumis à des forces directement appliquées et dont les côtés sont formés par des fils flexibles et inextensibles (*Fig.* 112). Deux problèmes différents se présentent : 1° On donne la figure d'équilibre et on demande les forces directement appliquées ;

2° On donne les forces directement appliquées et on demande la figure d'équilibre.

Soient A_1, A_2, ... A_n, le polygone funiculaire ; $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, ... $\overline{F}_n$ les forces appliquées aux sommets qui constituent les parties indéformables du système ; les liaisons sont les cordons, que l'on remplace ici par des tensions de sens déterminés. Chaque sommet rendu libre, donne une équation géométrique équivalente aux trois équations analytiques d'équilibre. De là n équations de la première catégorie ou $3n$ de la seconde. Or dans le premier problème, les inconnues se réduisent aux intensités des $(n - 1)$ tensions puisque celles-ci sont connues en direction. Il reste donc $(2n + 1)$ équations de condition entre les forces directement appliquées. Si l'on demande la figure d'équilibre, les inconnues sont les $3(n - 1)$ composantes des tensions ; leur élimination laisse trois équations de condition que l'on trouve facilement. En effet soient $\overline{T}_1$ la tension du cordon A_1A_2 sur le premier sommet, $-\overline{T}_1$ la tension égale et contraire qu'il exerce sur le sommet A_2 ; $\overline{T}_2$ la tension du

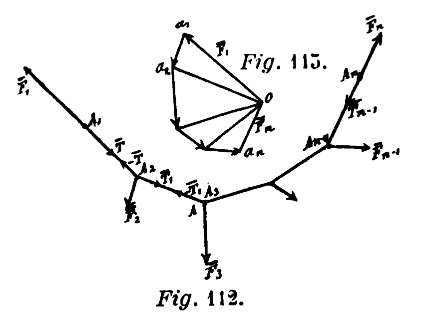


Fig. 113.

Fig. 112.

cordon $A_2 A_3$ sur le sommet A_2 ... etc. Les points A_1, A_2 ... A_n étant en équilibre, on a les n équations :

$$(1)\quad \overline{F}_1 + \overline{T}_1 = 0. \quad \overline{F}_2 - \overline{T}_1 + \overline{T}_2 = 0. \quad \ldots\ldots \overline{F}_n - \overline{T}_{n-1} = 0.$$

En les ajoutant membre à membre, il vient :

$$\Sigma\overline{F} = 0 \quad \text{ou bien} \quad \Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0.$$

Ce sont les équations d'équilibre de translation du corps solide, que l'on pouvait établir *a priori*, mais elles ne suffisent pas.

Par suite de la nature particulière des liaisons, il faut que les forces appliquées aux sommets extrêmes, soient dirigées suivant les prolongements extérieurs des côtés.

Les tensions se déduisent des équations d'équilibre. En faisant successivement la somme des deux, trois premières équations, il vient :

$$\overline{T}_1 = -\overline{F}_1, \quad \overline{T}_2 = -(\overline{F}_1 + \overline{F}_2), \quad \overline{T}_3 = -(\overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3) \cdots$$

Donc la tension développée par un cordon sur un sommet du polygone, est égale et de sens contraire à la résultante des forces directement appliquées depuis le sommet considéré jusqu'à l'extrémité du polygone qui est opposée au sens de la tension cherchée.

Ces résultats se représentent par le *polygone de Varignon.* On l'obtient, par rapport à un point quelconque pris pour origine, en construisant la somme géométrique des forces directement appliquées, disposées dans l'ordre des sommets (*Fig.* 113). Nous avons ainsi :

$$\overline{oa_1} = \overline{F}_1, \quad \overline{a_1a_2} = \overline{F}_2, \ \ldots\ldots$$

Les vecteurs issus des sommets a_1, a_2, a_3, et qui aboutissent au point o, représentent dans l'ordre où ils sont disposés, les tensions des cordons sur les sommets du polygone funiculaire et le dernier côté $\overline{a_n o} = \overline{F}_n$ ferme le polygone de Varignon, car $\Sigma\overline{F} = 0$. On en déduit la figure d'équilibre, puisque les tensions donnent les directions des cordons, dont les longueurs sont connues.

Si le polygone de Varignon est plan, il en est de même du polygone funiculaire ; ce qui se présente lorsque les forces directement appliquées aux sommets, sont parallèles entre elles.

Nous examinerons une application de ce cas particulier, dans le problème du pont suspendu.

303. Remarque. — Si les sommets extrêmes du polygone funiculaire sont des points fixes, les réactions qu'ils développent remplacent les forces extrêmes $\overline{F}_1$ et $\overline{F}_n$. Elles sont inconnues, mais peuvent cependant se calculer, parce qu'aux équations de condition : $\Sigma X = 0$, $\Sigma Y = 0$, $\Sigma Z = 0$, nous joindrons trois équations nouvelles, exprimant que la somme algébrique des projections des côtés du polygone funiculaire sur chaque axe, est la projection de la droite qui joint les points d'attache.

304. Pont suspendu. — Le pont suspendu est formé de deux cables de suspension, qui portent des tiges verticales équidistantes appelées suspensoires ; celles-ci supportent le tablier du pont et la surcharge supposée uniformément répartie, de manière que chaque tige soit soumise à la même charge, abstraction faite de son poids. Les cables sont donc assimilables à des polygones funiculaires dont les sommets intermédiaires sont les points d'attache des suspensoires et les sommets extrêmes sont fixés sur les piliers. La figure du cable est plane, parce que l'équilibre d'un sommet quelconque exige que les tensions des côtés aboutissants et le poids de la charge soient dans un plan vertical ; or celui-ci se confond avec le plan des forces du sommet suivant, déterminé par une charge verticale et une tension directement opposée à l'une des précédentes. Dès lors les cables sont contenus dans les plans verticaux passant par les points fixes des piliers ; comme ils sont disposés symétriquement ainsi que les forces, par rapport à l'axe du pont, nous ramènerons tout le système à un cable unique situé dans le plan de symétrie.

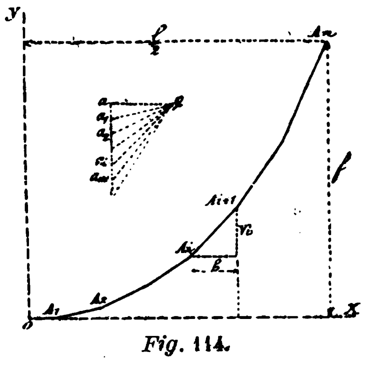


Fig. 114.

Admettons l'un des côtés horizontal en même temps que les sommets des piliers au même niveau : le cable est alors symétrique par rapport à la verticale du point milieu du côté horizontal. Nous le rapportons aux axes indiqués sur la figure 114.

Soient h la distance des suspensoires, p la charge des sommets, T_0 la tension du côté horizontal. Construisons le polygone de Varignon. Par le point o_1 menons $\overline{o_1 a} = \overline{T}_0$; par le point a menons

$\overline{aa_1} = \overline{p}$. La tension du côté A_1A_2 sur le sommet A_1 est égale à $\overline{a_1o_1}$ et ainsi de suite.

En général, la tension d'un côté A_iA_{i+1} sur le sommet A_i, est représentée par $\overline{a_io_1}$; sa composante verticale est ip, sa composante horizontale est T_0.

Donc la composante horizontale de la tension d'un côté quelconque est constante et égale à la tension du côté horizontal ; sa composante verticale est égale à la somme des poids appliqués depuis le milieu du côté horizontal, jusqu'au sommet où commence le côté.

La tension T_0 est inconnue ; la *portée* l, c'est-à dire la distance horizontale des piliers et la *flèche* f c'est-à-dire la hauteur des points d'attache du cable sur les piliers, au-dessus du côté horizontal, sont données.

Ceci permet de calculer T_0 et les autres tensions. En effet soient A_iA_{i+1} un côté quelconque du polygone formé par le cable ; V_i sa projection sur la verticale passant par le sommet A_i ; le triangle rectangle qui en résulte, est semblable au triangle oaa_i du polygone de Varignon et donne :

$$\frac{V_i}{h} = \frac{ip}{T_0} \quad \text{ou} \quad V_i = \frac{hip}{T_0},$$

et par suite la flèche f est déterminée par la relation :

$$f = V_1 \ldots + V_{n-1} = \frac{hp}{T_0}\Big(1 + 2 \ldots + (n-1)\Big) = \frac{hp\,(n^2 - n)}{2T_0},$$

d'où l'on tire T_0 et par suite les tensions, la figure d'équilibre du cable, les longueurs des suspensoires et l'équarissage des pièces. Ces résultats ne sont qu'approximatifs car nous avons négligé les poids des cables, des suspensoires, etc. ; les sommets sont donc inégalement chargés, et les calculs seront recommencés en partant des valeurs obtenues précédemment.

305. Cas particulier. — *Le polygone funiculaire est constitué par un fil continu sur lequel des anneaux peuvent glisser sans frottement* (*Fig.* 115).

Dans cette hypothèse la tension est constante dans toute la longueur du fil. Imaginons en effet qu'on le coupe de part et d'autre du sommet, aux points M et N. Remplaçons les parties

supprimées par les tensions $\overline{T}$, $\overline{T}_1$, qu'elles produisent sur MN. Cette partie du polygone isolée est en équilibre sous l'action des tensions $\overline{T}_1$, $\overline{T}$, et de la réaction $\overline{R}$ de l'anneau. Ce dernier étant lui-même en équilibre, les forces $\overline{F}$ et $-\overline{R}$ auxquelles il est soumis, sont égales et directement opposées, donc $\overline{R} = \overline{F}$. Si l'on applique le théorème des vitesses virtuelles au système MN, pour le mouvement virtuel, compatible avec la liaison formée par l'anneau, qui fait passer MN en M_1N_1, il vient :

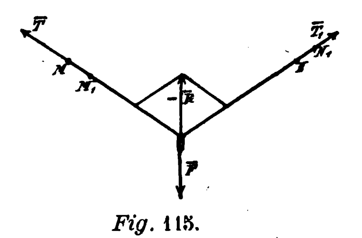


Fig. 115.

$$T \frac{\delta s}{\delta t} - T_1 \frac{\delta s_1}{\delta t} = 0,$$

or $\frac{\delta s}{\delta t} = \frac{\delta s_1}{\delta t}$ puisque le fil est inextensible et par conséquent $T = T_1$. Il suit de là qu'aux sommets intermédiaires les forces directement appliquées sont bissectrices des angles.

Le raisonnement précédent prouve encore, que la tension du fil est indépendante des surfaces indéformables, sur lesquelles il passe.

306. **Application du polygone funiculaire à la détermination de la résultante de forces situées dans un plan.** — On peut, au moyen du polygone funiculaire, déterminer en grandeur, sens, direction et position, la résultante de forces situées dans un plan (235), problème d'une application fréquente en graphostatique.

Soient $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, les forces données (*Fig.* 116). En un point A_1, pris sur la direction de $\overline{F}_1$ transportons une force quelconque $\overline{P}$ dont nous supposons le point d'application en A. Elle se compose avec $\overline{F}_1$ transportée au point A_1 (233) et la ligne d'action de la résultante $\overline{R}_1$ rencontre au point A_2 la ligne d'action de la force $\overline{F}_2$. Prenons A_2 pour point d'application de $\overline{R}_1$ et de $\overline{F}_2$. Elles ont une résultante $\overline{R}_2$ qui ren-

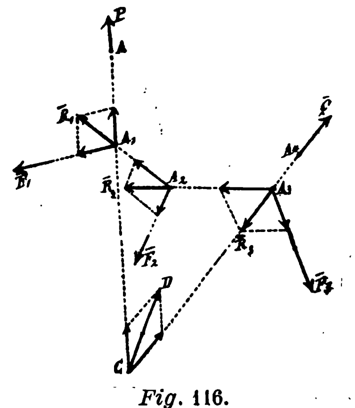


Fig. 116.

contre la ligne d'action de $\overline{F}_3$ au point A_3. Transportons en ce point les deux forces $\overline{F}_3$ et $\overline{R}_2$ et recommençons les mêmes opérations, ce qui donne la résultante $\overline{R}_3$. Admettons enfin que nous appliquions la force $\overline{Q} = -\overline{R}_3$ au point A_4 pris sur la direction de $\overline{R}_3$.

Si l'on imagine alors le polygone funiculaire $AA_1A_2A_3A_4$, soumis aux forces $\overline{P}$, $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$, $\overline{Q}$, la construction précédente prouve qu'il est en équilibre. Il est donc assimilable à un solide et la résultante des forces $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ est égale et directement opposée à la résultante $\overline{CD}$ de $\overline{P}$ et de $\overline{Q}$.

Le même procédé convient à la détermination du centre de gravité d'un système pesant, lorsque les centres de gravité des corps composants sont dans un plan vertical.

307. **De la courbe funiculaire.**— *La courbe funiculaire est la figure d'équilibre d'un fil soumis à l'action de forces directement appliquées, réparties d'une manière continue sur toute la longueur du fil.*

Nous concevons ce système, en imaginant un polygone funiculaire dont les côtés décroissent indéfiniment en même temps que les forces appliquées aux sommets, de façon que le rapport entre l'intensité d'une force et la longueur du côté correspondant au même sommet, reste fini. Si les sommets se rapprochent indéfiniment, le polygone devient à la limite la courbe funiculaire. Par suite de son mode de génération, le rapport entre la résultante de translation des forces directement appliquées à un arc quelconque de la courbe et la longueur de celui-ci, reste fini.

Soient AB un arc de la courbe; Δs sa longueur comptée positivement de A vers B; $\overline{\Delta F}$ la résultante de translation des forces directement appliquées à cette partie du fil (*Fig.* 117). Le rapport géométrique $\frac{\overline{\Delta F}}{\Delta s}$ est appelé la *force appliquée à l'arc* AB *rapportée à l'unité de longueur ;* la limite de ce rapport pour $\Delta s = 0$, prend le nom de *force appliquée au point* A *rapportée à l'unité de longueur.* C'est une fonction géométrique continue de l'arc s. Ses projections sur les axes rectangulaires des coordonnées sont trois fonctions continues de x, y, z.

Fig. 117.

Les conditions d'équilibre du fil, s'obtiennent en écrivant que

chacun de ses points est lui-même en équilibre. A cet effet considérons l'arc AB, isolé au moyen des tensions $\overline{T}$ et $\overline{T}_1$, appliquées aux points A et B suivant les prolongements extérieurs du fil, et dirigées suivant les tangentes en ces points. La génération de la courbe funiculaire permet d'assimiler l'arc AB à un polygone funiculaire et les mêmes conditions d'équilibre existent. Il faut d'abord que les forces appliquées aux sommets extrêmes soient dirigées suivant les prolongements extérieurs des côtés aboutissants, ce qui a lieu pour les tensions $\overline{T}$ et $\overline{T}_1$. Ensuite que l'on ait :

$$\overline{\Sigma F} = 0 \text{ ou } \Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0. \quad (302)$$

Formons ces équations. A cet effet soient $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ les cosinus directeurs de la tangente et $\cos \lambda$, $\cos \mu$, $\cos \nu$. ceux du rayon de courbure au point A. Les cosinus directeurs de la tangente en B seront :

$$\cos \alpha + \Delta \cos \alpha, \quad \cos \beta + \Delta \cos \beta, \quad \cos \gamma + \Delta \cos \gamma.$$

On en déduit les cosinus directeurs des tensions $\overline{T}$ et $\overline{T}_1$, savoir :

$$-\cos \alpha, \quad -\cos \beta, \quad -\cos \gamma,$$
$$\cos \alpha + \Delta \cos \alpha, \quad \cos \beta + \Delta \cos \beta, \quad \cos \gamma + \Delta \cos \gamma.$$

Les trois équations d'équilibre de l'arc AB isolé, deviennent donc :

$$T_1 (\cos \alpha + \Delta \cos \alpha) - T \cos \alpha + \Delta F_x = 0,$$
$$T_1 (\cos \beta + \Delta \cos \beta) - T \cos \beta + \Delta F_y = 0,$$
$$T_1 (\cos \gamma + \Delta \cos \gamma) - T \cos \gamma + \Delta F_z = 0.$$

Ne considérons que la première et posons $T_1 = T + \Delta T$, nous aurons en développant :

$$\Delta T \cos \alpha + T \Delta \cos \alpha + \Delta T . \Delta \cos \alpha + \Delta F_x = 0.$$

Divisons cette équation par Δs et passons à la limite en faisant converger Δs vers zéro, nous trouverons que

$$\text{Lim} \left(\frac{\Delta T}{\Delta s}\right)_{\Delta s \equiv o} = \frac{dT}{ds}, \quad \lim \left(\frac{\Delta \cos \alpha}{\Delta s}\right)_{\Delta s \equiv o} = -\sin \alpha \frac{d\alpha}{ds},$$
$$\lim (\Delta \cos \alpha)_{\Delta s \equiv o} = 0, \quad \lim \left(\frac{\Delta F_x}{\Delta s}\right)_{\Delta s \equiv o} = X.$$

Il vient par conséquent :

$$(1) \quad \frac{dT}{ds} \cos \alpha - T \sin \alpha \frac{d\alpha}{ds} + X = 0.$$

On aurait de même :

$$(2) \quad \frac{dT}{ds} \cos \beta - T \sin \beta \frac{d\beta}{ds} + Y = 0,$$

$$(3) \quad \frac{dT}{ds} \cos \gamma - T \sin \gamma \frac{d\gamma}{ds} + Z = 0.$$

Ces trois équations se mettent sous la forme plus simple :

$$(\mathrm{II}) \quad \frac{d.T \cos \alpha}{ds} + X = 0, \quad \frac{d.T \cos \beta}{ds} + Y = 0, \quad \frac{d.T \cos \gamma}{ds} + Z = 0.$$

On peut encore les transformer au moyen des relations analytiques suivantes :

$$\cos \lambda = \frac{d \cos \alpha}{d\sigma} = \frac{\frac{d \cos \alpha}{ds}}{\frac{d\sigma}{ds}} = \frac{-\sin \alpha \frac{d\alpha}{ds}}{\frac{d\sigma}{ds}} = -\rho \sin \alpha \frac{d\alpha}{ds},$$

$$\cos \mu = -\rho \sin \beta \frac{d\beta}{ds}, \quad \cos \nu = -\rho \sin \gamma \frac{d\gamma}{ds}.$$

dans lesquelles ρ est la longueur du rayon de courbure de la courbe au point considéré. Cela nous donne :

$$\mathrm{III} \left\{ \begin{aligned} &\frac{dT}{ds} \cos \alpha + \frac{T}{\rho} \cos \lambda + X = 0, \\ &\frac{dT}{ds} \cos \beta + \frac{T}{\rho} \cos \mu + Y = 0, \\ &\frac{dT}{ds} \cos \gamma + \frac{T}{\rho} \cos \nu + Z = 0. \end{aligned} \right.$$

On en conclut que la force $\overline{F}$ est résultante de $-\frac{\overline{dT}}{ds}$ et de $\overline{-\frac{T}{\rho}}$ dirigées suivant la tangente et le rayon de courbure. Elle est par conséquent dans le plan osculateur.

Les équations précédentes sont nécessaires à l'équilibre ; elles sont aussi suffisantes si le fil a ses deux extrémités fixées ou soumises à des forces convenables. Vérifiées en chaque point, elles donnent en effet les composantes de la tension et par le fait même, la tangente à la courbe funiculaire, ce que les équations (II) montrent immédiatement. La figure d'équilibre est donc obtenue ; ses équations résultent de l'élimination de T entre les équations (II).

Pour calculer la tension, multiplions les équations du système (III) par $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ et ajoutons-les, il viendra :

$$\frac{dT}{ds}\left(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma\right)$$
$$+ \frac{T}{\rho}\left(\cos \alpha \cos \lambda + \cos \beta \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu\right)$$
$$+ X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma = 0 ;$$

or :

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1,$$
$$\cos \lambda \cos \alpha + \cos \beta \cos \mu + \cos \gamma \cos \nu = 0,$$

donc :

$$\text{(IV)} \quad \frac{dT}{ds} = -\left(X \cos \alpha + Y \cos \beta + Z \cos \gamma\right)$$
$$= -\left(X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds}\right).$$

Lorsque il y a fonction des forces, $X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds}$ est la dérivée totale d'une fonction $\varphi (x, y, z)$; l'équation (IV) s'intègre alors immédiatement et donne :

$$\frac{dT}{ds} + \frac{d\varphi}{ds} = 0, \quad \text{d'où} \quad T = c^{te} - \varphi (x, y, z).$$

La tension est par conséquent uniquement fonction des coordonnées du point de la courbe auquel elle se rapporte.

Comme exemple de ce cas particulier, considérons les forces directement appliquées, normales au fil, nous aurons :

$$X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\frac{dT}{ds} = 0, \quad \text{ou} \quad T = c^{te}.$$

La tension étant constante dans toute la longueur du fil, les équations d'équilibre deviennent :

$$\frac{T}{\rho} \cos \lambda = - X, \quad \frac{T}{\rho} \cos \mu = - Y, \quad \frac{T}{\rho} \cos \nu = - Z.$$

On en conclut que la force $\overline{F}$ est dirigée suivant le rayon de courbure et que son intensité est en raison inverse de la grandeur de celui-ci. Il en est ainsi pour un fil tendu sur une surface sans

frottement. Les forces directement appliquées sont alors remplacées par les réactions normales de la surface. Elles ont donc la direction du rayon de courbure de la courbe au point considéré et comme elles sont aussi normales à la surface, la courbe jouit de la propriété d'*avoir son rayon de courbure, dirigé suivant la normale à la surface*. C'est ce qui définit les lignes géodésiques ou de longueur minimum.

308. **Équilibre d'un fil pesant et homogène.** — Un fil pesant et homogène, suspendu par ses extrémités à deux points fixes, prend une figure d'équilibre que l'on nomme la *chaînette*. Le raisonnement tenu au nº 304 prouve que cette courbe est toute entière dans le plan vertical déterminé par les deux points fixes. Prenons ce plan pour plan des XY, l'axe des x horizontal et l'axe des y vertical (*Fig.* 118). Nous ferons passer celui-ci par le point le plus bas de la chaînette et nous le supposons positif dans le sens ascendant.

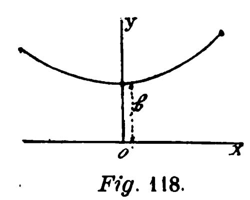


Fig. 118.

Si donc ϖ est le poids de l'unité de longueur du fil, on a : $X = 0$, $Y = -\varpi$ et les équations du nº 307 deviennent :

$$(1)\quad \frac{d\left(T\frac{dx}{ds}\right)}{ds} = 0, \quad (2)\quad \frac{d.\left(T\frac{dy}{ds}\right)}{ds} - \varpi = 0,$$

$$(3)\quad \frac{dT}{ds} = \varpi\frac{dy}{ds}.$$

Nous obtenons, en intégrant :

$$T\frac{dx}{ds} = C, \quad T\frac{dy}{ds} = \varpi s + C_1, \quad T = \varpi y + C_2.$$

Supposons que l'axe OX ait été tracé à une hauteur h au dessous du point le plus bas de la courbe, telle que ϖh représente la tension, nécessairement horizontale, qui existe en ce point, pris pour origine de l'arc s. On trouve :

$$C = \varpi h, \quad C_1 = 0, \quad C_2 = 0,$$

d'où :

$$(1')\quad T\frac{dx}{ds} = \varpi h, \quad (2')\quad T\frac{dy}{ds} = \varpi s, \quad (3')\quad T = \varpi y.$$

Il en résulte que la composante horizontale de la tension est constante ; sa composante verticale est proportionnelle à la

longueur du fil, comptée à partir du point le plus bas et enfin la tension elle-même est proportionnelle en chaque point, à l'ordonnée par rapport aux axes que l'on a définis.

L'équation de la courbe s'obtient par l'élimination de T entre deux des équations précédentes. De (1') et (3'), nous tirons :

$$y\frac{dx}{ds} = \frac{y}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = h,$$

d'où :

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\left(\frac{y}{h}\right)^2 - 1}, \quad \int \frac{dx}{h} = \int \frac{\frac{dy}{h}}{\sqrt{\left(\frac{y}{h}\right)^2 - 1}}.$$

Posons :

$$z = \frac{y}{h} + \sqrt{\left(\frac{y}{h}\right)^2 - 1},$$

il vient :

$$\int \frac{dx}{h} = \int \frac{dz}{z} = \log_n\left(\frac{y}{h} + \sqrt{\left(\frac{y}{h}\right)^2 - 1}\right) + C^{te},$$

$$\frac{x}{h} = \log_n\left(\frac{y}{h} + \sqrt{\left(\frac{y}{h}\right)^2 - 1}\right) + C^{te}.$$

Mais au point le plus bas de la courbe $x = 0$, $y = h$, $C^{te} = 0$, donc :

$$(4) \quad \frac{y}{h} + \sqrt{\left(\frac{y}{h}\right)^2 - 1} = e^{\frac{x}{h}},$$

d'ailleurs :

$$\left(\frac{y}{h} + \sqrt{\quad}\right)\left(\frac{y}{h} - \sqrt{\quad}\right) = 1,$$

Il en résulte :

$$(5) \quad \frac{y}{h} - \sqrt{\quad} = \frac{1}{e^{\frac{x}{h}}} = e^{-\frac{x}{h}}.$$

En additionnant les équations (4) et (5), membre à membre, on trouve :

$$y = \frac{h}{2}\left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right),$$

c'est l'équation de la chaînette. La solution complète du problème

suppose la connaissance de h. Ceci fait l'objet d'un nouveau problème dont voici l'énoncé : *On donne les points d'attache du fil et sa longueur. On demande de tracer la chaînette.* (Voir Gilbert, *Mécanique analytique).*

CHAPITRE XXVII

APPLICATION DE LA STATIQUE A L'ÉQUILIBRE DES MACHINES

309. **Définitions.** — Une machine est un système matériel à liaisons complètes, destiné à maintenir en équilibre des forces appelées *résistances* au moyen de forces non directement opposées, qui prennent le nom de *forces motrices* (221).

On distingue les machines *simples* et les machines *composées*.

Les machines simples sont le *levier*, la *corde* et le plan *incliné*. Les machines composées résultent de combinaisons plus ou moins compliquées des machines simples.

Dans ce chapitre, nous ne tiendrons compte ni du frottement, ni de la raideur des cordages.

Les différents problèmes auxquels donne lieu l'équilibre des machines, seront résolus, soit par la méthode des réactions, soit par le théorème des vitesses virtuelles.

310. **Levier.** — Le levier est un solide possédant un point fixe appelé *point d'appui* et qui est soumis à l'action de forces quelconques. La condition d'équilibre et la charge du point d'appui, sont déterminées d'une manière générale au n° 295. Souvent les forces et le point d'appui sont dans un plan; l'équilibre exige alors que le moment résultant des forces par rapport au point d'appui soit nul. S'il n'y a qu'une seule force motrice $\overline{P}$ et une seule résistance $\overline{Q}$, et que p et q soient leurs bras de levier, on aura :

$$Pp - Qq = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{P}{Q} = \frac{q}{p}.$$

La *force motrice et la résistance tendent donc à faire tourner le levier en sens contraires et leurs intensités sont en raison inverse des bras de levier.*

311. **Corde.** — La corde est en équilibre lorsque les forces qui

agissent à ses extrémités ont la même intensité et sont dirigées suivant les prolongements extérieurs (298).

312. Plan incliné. — Le plan incliné est constitué par un plan résistant, sur lequel s'appuie un corps solide, en équilibre sous l'action des forces directement appliquées et de la réaction du plan (*Fig.* 119).

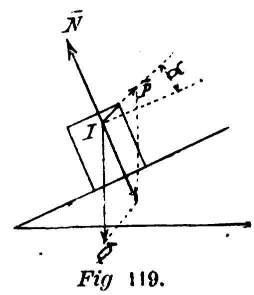


Fig 119.

Le plus souvent on demande l'intensité que doit avoir une force motrice $\bar{P}$ de direction déterminée, pour maintenir en équilibre un corps pesant, placé sur un plan incliné.

Soient $\bar{Q}$ le poids du corps, i l'inclinaison du plan sur l'horizon. Le corps isolé est soumis à l'action de trois forces savoir : le poids $\bar{Q}$ qui a sa ligne d'action verticale et passant par le centre de gravité, la réaction $\bar{N}$ normale au plan, et la force motrice $\bar{P}$. Par suite de l'équilibre, elles sont dans le plan vertical de la ligne de plus grande pente du centre de gravité (229) et l'une d'elles $\bar{N}$ doit être égale et directement opposée à la résultante des deux autres. Le problème est donc ramené à la construction d'un parallélogramme, dans lequel nous connaissons la direction des côtés, la grandeur Q de l'un d'eux et la direction de la diagonale. On trouve ainsi $\bar{P}$.

Pour exprimer analytiquement cette force, désignons par α son inclinaison sur le plan, le triangle des forces donne :

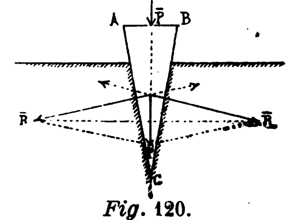
$$\frac{P}{Q} = \frac{\sin i}{\sin (90^\circ + \alpha)} \quad \text{ou} \quad P = \frac{Q \sin i}{\cos \alpha}.$$

MACHINES COMPOSÉES

313. Le coin. — Le coin est un prisme triangulaire, de section généralement isocèle, que l'on introduit entre des corps pour les séparer (*Fig.* 120). Considéré mécaniquement, il constitue une combinaison de plans inclinés.

La face AB sur laquelle s'exerce la force motrice est la *tête* du coin ; les faces AC et BC sont les *joues*, l'arête C est dite le *tranchant*. Admettons les réactions développées sur les faces, égales et symétriquement disposées ; elles ont une résultante qui est

égale et directement opposée à la force motrice, s'il y a équilibre (229, c). Le triangle des forces, semblable au triangle ABC, donne alors :

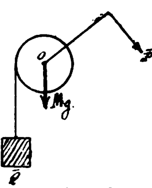

Fig. 120.

$$\frac{P}{AB} = \frac{R}{AC},$$

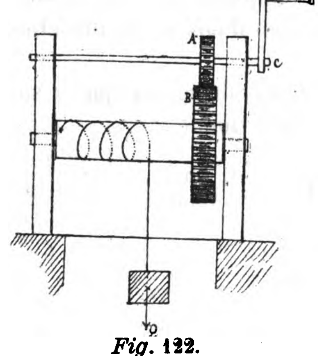
donc *la force motrice est à la résistance comme la tête du coin est à la face.*

La théorie des instruments tranchants est basée sur celle du coin.

314. **Le treuil.** — Le treuil comprend un cylindre horizontal, supporté par deux tourillons cylindriques, reposant dans des coussinets fixes, de même axe, qui constituent les appuis. La résistance est représentée par un poids $\overline{Q}$, disposé à l'extrémité d'une corde enroulée sur l'arbre, et la force motrice $\overline{P}$ est tangentielle à la circonférence décrite par le bouton d'une manivelle.


Fig. 121.

Nous déterminons les réactions des appuis comme il est dit au nº 296 ; quant à l'équation $\Sigma N = 0$, elle devient :


Fig. 122.

$$Pp = Qq,$$

et conduit aux conditions d'équilibre du levier.

Il arrive, dans les manœuvres des ports et de l'artillerie de forteresse, qu'on utilise des treuils à axes verticaux, appelés *cabestans.*

315. **Combinaison de treuils.**— Le *treuil à engrenages* diffère du treuil ordinaire en ce que la manivelle est calée sur un arbre parallèle au corps du treuil. Elle le commande par l'intermédiaire d'un pignon A monté sur l'arbre et d'une roue dentée B (*Fig.* 122).

Quelle que soit la complication du système, sa théorie se ramène toujours à celle du treuil.

316. De la poulie. — La poulie est formée par un disque circulaire, dont la jante creusée en gorge, reçoit une corde. Son axe est porté par une pièce appelée *chape*, destinée à suspendre la poulie ou à donner le point d'application de la résistance. De là deux dispositions différentes : la *poulie fixe* et la *poulie mobile*.

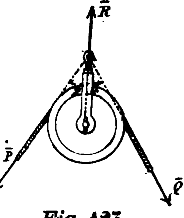


Fig. 123.

Dans le premier cas (*Fig.* 123) l'axe est fixe ; la force motrice $\overline{P}$ et la résistance $\overline{Q}$ sont appliquées aux extrémités du cordage, tangentiellement au disque, et l'on a $P = Q$. La machine permet donc simplement d'équilibrer *une résistance par une force motrice de même intensité, mais de direction différente.*

La pression subie par l'axe est égale et contraire à la réaction $\overline{R}$ de ce dernier sur le disque. Or celui-ci est en équilibre sous l'action des trois forces $\overline{P}$, $\overline{Q}$, $\overline{R}$. Si donc 2α est l'angle $\widehat{PQ}$, nous aurons $R = 2P \cos \alpha$.

Lorsque la poulie est mobile, une des extrémités du cordage est fixe, l'autre est soumise à la force motrice $\overline{P}$, et la résistance $\overline{Q}$ agit sur la chape. Les formules précédentes sont applicables, mais à condition de remplacer R par Q, et Q par T (*Fig.* 124). Il vient :

$$P = T, \quad Q = 2P \cos \alpha.$$

Mais dans le triangle AOB, on a $AB = 2AO \cos \alpha$ et par suite :

$$\frac{P}{Q} = \frac{AO}{AB}.$$

Fig. 124.

Donc *la force motrice est à la résistance, comme le rayon de la poulie est à la corde de l'arc embrassé.* Il y a dès lors avantage à placer parallèlement les liens, puisqu'il en résulte $P = \frac{Q}{2}$.

317. Combinaison de poulies. — Les principales combinaisons sont représentées par les figures 125 et 126. Dans la première, on reconnaît que s'il y a n poulies : $\frac{P}{Q} = \frac{r}{AB} \frac{r'}{A'B'} \dots = \frac{1}{2^n}$.

Généralement les poulies sont portées par une même chape et

constituent une *moufle*. Un *palan* est composé de deux moufles : une moufle *fixe* accrochée au point de suspension et une moufle *mobile* à laquelle est appliquée la résistance. Le cordage qui les réunit, est fixé par l'une de ses extrémités à la moufle supérieure (*Fig.* 126) puis passe successivement sur les différentes poulies. A son extrémité libre agit la force motrice $\overline{P}$. Comme il n'y a pas de frottement, la tension du cordage reste constante dans toute sa longueur ; si les brins sont parallèles, on démontre, par la méthode des réactions, que dans un palan de n poulies, $P = \frac{Q}{n}$.

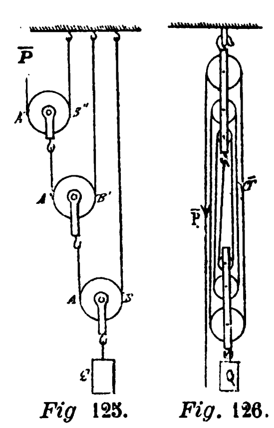


Fig 125. *Fig.* 126.

318. **Balance de Quintenz ou balance bascule.** — (*Fig.* 127) Cet appareil comprend une plate-forme horizontale EF où se place le corps de poids Q qu'il faut peser. Elle peut tourner autour de l'arète F d'un couteau reposant sur le tablier HI ; une tringle EC est articulée en E. Le tablier HI est disposé d'une manière analogue. Les deux tringles HD, EC sont elles mêmes articulées en D et en C, au fléau ABCD qui peut tourner autour de l'arête fixe B, et porte à son extrémité le plateau avec les poids P.

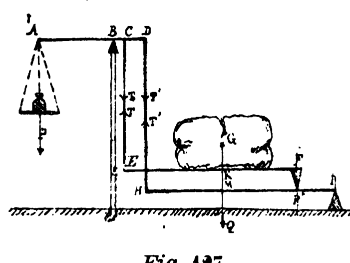


Fig. 127.

Appliquons la méthode des vitesses virtuelles. Supposons la plate-forme, le tablier et le fléau horizontaux. Une rotation du fléau autour de B correspond à une rotation du tablier autour de l'axe I. Ces mouvements compatibles avec les liaisons, se font avec les vitesses virtuelles angulaires ω et ω' ; ils communiquent aux points d'application de $\overline{P}$ et $\overline{Q}$, les vitesses verticales $\overline{V}$ et $\overline{v}$. De là l'équation d'équilibre :

$$PV - Qv = 0.$$

Mais $\overline{v}$ dépendant de la position du fardeau sur la plate-forme, le poids P et par suite les indications de la bascule, seraient

variables. Ce défaut capital disparaît, si nous déterminons les dimensions de manière à donner à la plate-forme un mouvement de translation verticale. Alors les vitesses des points E ou C, et F sont égales ; l'on a :

$$BC.\omega = IF'.\omega' \text{ ou } \frac{\omega}{\omega'} = \frac{IF'}{BC}.$$

De l'égalité des vitesses des points D et H on tire aussi :

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{HI}{BD},$$

il en résulte la condition de construction :

$$\frac{IF'}{BC} = \frac{HI}{BD}.$$

Or $v = \omega.BC$, $V = \omega.AB$, l'équation d'équilibre devient donc :

$$\frac{P}{Q} = \frac{BC}{AB}.$$

On fait en pratique : $\frac{BC}{AB} = \frac{1}{10}$.

319. De la vis. — Imaginons 1° une hélice tracée sur un cylindre droit à base circulaire ; 2° un profil polygonal mobile disposé dans un plan méridien du cylindre, de manière qu'un de ses côtés coïncide avec la génératrice et décrive par un de ses sommets l'hélice directrice. Le profil engendre un *filet* de la vis qui a le cylindre pour noyau.

On distingue les vis à filets *triangulaires* et à filets *carrés*. Le pas de l'hélice est appelé le *pas* de la vis. Soient p sa longueur, b le côté du profil générateur en coïncidence avec le cylindre. Si $p = 2nb$, la vis est dite à $2n$ ou à n filets, suivant qu'ils sont triangulaires ou carrés. (*Fig.* 128).

Fig. 128.

Ils s'engagent dans un écrou taraudé que nous admettons fixe. Le mouvement de la vis est alors résultant d'une rotation et d'une translation simultanées, de telle sorte que par tour, il y ait un déplacement parallèle à l'axe, égal au pas. Ces deux mouvements ne sont pas nécessairement possédés par la vis ou par l'écrou. L'un des organes peut avoir la translation et l'autre la rotation.

Nous établirons la théorie de cette machine en supposant qu'elle

soit en équilibre, sous l'action de la force motrice $\overline{P}$, tangente à la circonférence de rayon R décrite par l'extrémité de la manivelle, et de la résistance $\overline{Q}$ dirigée suivant l'axe de la vis. Appliquons le théorème des vitesses virtuelles. Soient ω la vitesse angulaire de rotation, $\overline{v}$ la vitesse simultanée de translation.

La somme des puissances de $\overline{P}$ et $\overline{Q}$ est nulle et chacune d'elles est la somme des puissances dans les mouvements composants. Or dans la rotation, la puissance de $\overline{P}$ est $PR\omega$ et la puissance de $\overline{Q}$ est nulle, puisque cette force est perpendiculaire à la vitesse de rotation. De même dans la translation, la puissance de $\overline{P}$ est nulle et celle de $\overline{Q}$ a pour valeur $-Qv$ puisque Q et v sont de sens opposés. Il vient par conséquent :

$$PR\omega - Qv = 0.$$

Des propriétés de l'hélice, on tire aussi : $\frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{p}$, donc :

$$\frac{P}{Q} = \frac{p}{2\pi R}.$$

Ainsi la force motrice est à la résistance, comme le pas de la vis est à la circonférence que décrirait le point d'application de la force motrice, dans la rotation autour de l'axe de la vis.

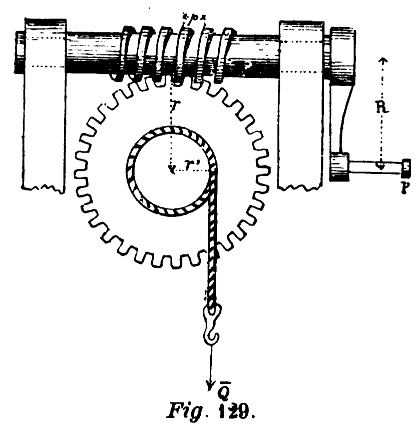


Fig. 129.

320. De la vis sans fin (*Fig.* 129). — La vis sans fin comprend une vis sans écrou qui tourne autour d'un axe fixe sous l'action de la force motrice $\overline{P}$ agissant sur la manivelle comme nous l'avons indiqué au n° 319. Elle engrène avec un pignon solidaire d'un treuil, auquel est appliquée la résistance $\overline{Q}$.

Supposons la machine en équilibre. Soient Ω et ω les vitesses angulaires virtuelles de la vis et du treuil ; les vitesses des points d'application de $\overline{P}$ et $\overline{Q}$ seront : $V = R\Omega$, $v = r'\omega$.

Mais pour un tour de la vis, le pignon tourne d'un arc égal au pas, ou d'un angle au centre $\frac{p}{r}$. Quels que soient d'ailleurs les

déplacements angulaires de la vis et du pignon, ils sont dans un rapport constant et l'on a :

$$\frac{\Omega}{\omega} = \frac{2\pi r}{p},$$

d'où :

$$v = r'\omega = \frac{pr'}{2\pi r}\,\Omega.$$

Les puissances de $\overline{\mathrm{P}}$ et de $\overline{\mathrm{Q}}$ sont donc $\mathrm{PR}\Omega$, $-\mathrm{Q}\,\frac{pr'}{2\pi r}\,\Omega$ et le théorème des vitesses virtuelles donne l'équation :

$$\mathrm{PR}\Omega - \mathrm{Q}\,\frac{pr'}{2\pi r}\,\Omega = 0, \text{ et par suite } \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}} = \frac{pr'}{2\pi r\mathrm{R}}.$$

321. **Remarque.** — Les machines permettent d'équilibrer des résistances au moyen de forces motrices non directement opposées et souvent plus petites. Ce résultat est dû aux réactions des organes, mais ce que l'on gagne en force, se perd en vitesse. Ainsi dans la vis sans fin :

$$\frac{\mathrm{R}\Omega}{v} = \frac{2\pi\mathrm{R}r}{r'p} = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}}.$$

Une diminution du rapport $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ correspond donc à une augmentation du rapport des vitesses $\frac{\mathrm{R}\Omega}{v}$. Ce n'est qu'une conséquence d'une loi plus générale : *Dans toute machine en mouvement uniforme, la puissance de la force motrice est constamment égale à la puissance de la résistance.* De ce chef aucune économie n'est donc possible par l'emploi des machines ; leur fonctionnement met d'ailleurs en jeu les *résistances passives,* qui amènent la transformation d'une partie de l'énergie mécanique en énergie thermique, perdue ensuite par rayonnement.

CHAPITRE XXVIII

DU FROTTEMENT

322. **Définitions.** — L'indéformabilité des solides naturels n'existe pas. Si on les met en contact, les points de leurs surfaces qui sont suffisamment rapprochés, développent des actions réciproques, qui obligent ces points à prendre de nouvelles positions.

De là une déformation, manifestée par la résistance au mouvement de l'un des corps sur la surface de l'autre. La réaction totale s'incline sur la normale commune et donne une composante tangentielle ou frottement. Celui-ci dépend du mouvement et il faut en pratique, distinguer les frottements *statique, dynamique* et de *roulement.* Nous étudierons ce dernier en mécanique appliquée.

Dans ce qui suit, nous supposerons l'un des corps immobile; cette hypothèse peut toujours être faite, si l'on tient compte des théories du mouvement relatif.

323. **Frottement statique.** — Considérons d'abord un solide pesant en équilibre, qui repose sur la surface horizontale d'un appui matériel. La réaction du plan et le poids du corps sont égaux et directement opposés. L'expérience prouve que si l'on fait agir ensuite une force horizontale progressivement croissante $\bar{\varphi}$, le mouvement se produit lorsque l'intensité dépasse une valeur déterminée F (*Fig.* 130). Pour cette force F, l'équilibre existe encore, et la réaction totale est donc égale à $-(\bar{P} + \bar{F})$; elle fait avec la verticale, un angle α qui est maximum, parce que le mouvement aurait lieu pour une force immédiatement supérieure à F. L'inclinaison limite de la réaction s'appelle l'*angle de frottement.* En statique, la réaction totale peut donc faire avec la normale aux surfaces en contact un angle compris entre 0 et l'angle de frottement. A cette dernière inclinaison correspond une composante tangentielle, dite le *frottement au départ,* dont les lois trouvées par Coulomb, vérifiées ensuite par Morin, sont les suivantes :

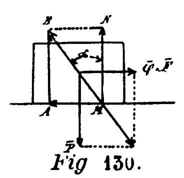


Fig 130.

1° *Le frottement au départ est proportionnel à la pression normale.*

2° *Il dépend de la nature et de l'état de ces surfaces, mais est indépendant de leur étendue.*

Si donc F est la grandeur du frottement au départ, N la réaction normale, R la réaction totale, la première loi donne : $F = fN$; f est appelé le *coefficient de frottement* au départ. En vertu de la seconde loi, il caractérise les surfaces frottantes. Ainsi pour le frottement de fer sur bronze sans enduit $f = 0{,}19$. Le coefficient f est lié par une relation importante à l'angle α. Dans le triangle BMA on a, en effet :

$$MA = AB\,tg\,\alpha \quad \text{ou} \quad F = N\,tg\,\alpha,$$

or $F = fN$, donc $f = tg\,\alpha$, c'est-à-dire que le coefficient de frottement au départ, est égal à la tangente de l'angle de frottement.

Le même triangle donne encore :

$$AM = MB \sin \alpha \quad \text{ou} \quad F = R \sin \alpha = \frac{f}{\sqrt{1+f^2}} R.$$

De là une seconde expression du frottement, en fonction de la réaction totale ; le coefficient de proportionnalité est dans ce cas $\sin \alpha$, que l'on représente par f'.

324. Frottement dynamique. — Le frottement, qui se produit pendant le glissement, prend le nom de *frottement dynamique*. Il est déterminé par les lois du frottement statique, auxquelles il faut ajouter la loi suivante : *Le frottement dynamique est directement opposé à la vitesse, dont il est indépendant.*

Cette dernière partie de l'énoncé n'est acceptable que pour des vitesses ne dépassant pas $3^{m}50$ par seconde, vitesse maximum réalisée dans les expériences de Morin.

Le frottement au départ diffère du frottement dynamique, en ce que le coefficient de frottement du premier est un peu plus grand que celui du second. De plus le frottement statique est directement opposé à la composante tangentielle de la force motrice, tandis que le frottement dynamique est dirigé suivant la vitesse et en sens opposé. Enfin le frottement statique peut prendre toutes les valeurs comprises entre zéro et le frottement au départ, alors que le frottement dynamique reste constant pendant le mouvement. Dans le premier cas, la réaction totale fait avec la normale un angle variable qui a pour limite supérieure α ; dans le second son inclinaison est constante et plus petite que α. Elle est renseignée dans les tables en même temps que ce dernier. Le glissement n'est donc possible que si la réaction totale s'incline d'abord sur la normale aux surfaces en contact de l'angle α ; il ne saurait se produire lorsque cette inclinaison ne peut être atteinte. On dit alors qu'il y a *arc boutement*. Cette propriété importante intervient dans l'étude des mécanismes.

325. Remarque. — Dans les systèmes naturels, existent des frottements que n'élimine pas l'équation des vitesses virtuelles ; aussi applique-t-on de préférence la méthode des réactions, en remarquant que le rapport $\frac{F}{N}$, connu s'il y a mouvement ou équilibre au départ, est inconnu et plus petit que f dans les autres cas.

326. Problème. — *On donne un parallélépipède rectangle* (*Fig.* 131), *pesant et homogène, posé par une de ses faces sur un plan matériel dépoli, lequel est mobile autour d'une charnière horizontale. On demande 1° sous quelle inclinaison se produit le glissement; 2° la condition nécessaire à ce mouvement; 3° le coefficient de frottement au départ.*

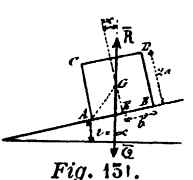


Fig. 131.

1° Soit i l'inclinaison cherchée, pour laquelle il y a équilibre au départ. Le poids $\overline{Q}$ du corps et la réaction $\overline{R}$ du plan sont égales et directement opposées. Mais du fait que $\overline{Q}$ est verticale, l'angle qu'elle fait avec la normale au plan et qui est l'angle de frottement, est égal à $\widehat{i}$. L'inclinaison limite que peut prendre le plan sans provoquer le glissement, est donc l'angle de frottement au départ α.

2° Pour qu'il en soit ainsi, il faut que le corps n'ait pas basculé autour de l'arête A, c'est-à-dire que la ligne d'action de $\overline{Q}$, dirigée suivant la verticale du centre de gravité, rencontre le plan dans l'intérieur de la surface de contact. Cette condition est réalisée si $\widehat{AGE} > \alpha$, or $tg AGE = \frac{b}{a}$, $tg\alpha = f$, d'où l'inégalité :

$$\frac{b}{a} \geqq f.$$

3° Ce qui précède, permet de conclure que la tangente *de l'inclinaison limite du plan* est égale à f.

327. Problème. — *On donne 1° un corps pesant* ABCD *posé sur un plan incliné d'un angle* i *plus grand que l'angle de frottement au départ ; 2° une force motrice* $\overline{P}$ *appliquée au corps suivant une direction donnée dans le plan vertical de la ligne de plus grande pente du centre de gravité. On demande son intensité lorsque le corps est en équilibre, sur le point de descendre le plan* (*Fig.* 132).

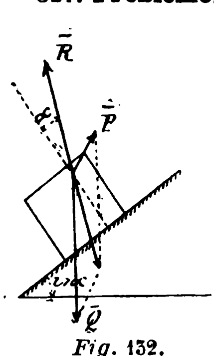


Fig. 132.

Le corps étant sur le point de descendre, est en équilibre sous l'action du poids $\overline{Q}$, de la force $\overline{P}$ et de la réaction totale $\overline{R}$, qui fait avec la normale au plan un angle égal à l'angle de frottement

au départ porté dans le sens ascendant. Cette force est donc connue en direction, de même que la force motrice. Dès lors la construction du parallélogramme des forces fait connaître $\overline{P}$ (229).

CHAPITRE XXIX

DES FORCES DE PERCUSSION

§ 1. *Du point matériel percuté*

328. Définitions. — Lorsqu'une force agit sur un point matériel pendant un temps donné, elle produit une variation de vitesse déterminée par la relation géométrique :

$$\overline{mv} - \overline{mv_0} = \int_0^t \overline{\mathrm{F}dt} \ (137).$$

$\int_0^t \overline{\mathrm{F}dt}$ est, par définition, l'*impulsion de la force* pendant l'intervalle de temps t et l'équation précédente s'énonce comme suit : *L'accroissement géométrique de la quantité de mouvement d'un point matériel pendant un temps donné, est égal à l'impulsion correspondante de la force totale.*

En général un accroissement fini de quantité de mouvement est produit par une force d'autant plus grande que la durée de son action est plus courte. On arrive ainsi à la notion des forces de percussion : *Ce sont des forces d'une durée d'action souvent inappréciable, qui communiquent à leurs points d'application des variations finies de vitesse.* Telles sont les déflagrations, les chocs, les explosions.

329. Conventions. — La durée de la percussion est si courte qu'elle permet d'adopter les conventions suivantes :

1° *Le point percuté est considéré comme immobile pendant la percussion,* puisque le déplacement qu'il prend est le produit de la vitesse moyenne pendant la percussion, par la durée de celle-ci. Or la première a une grandeur finie, et la seconde est inappréciable.

2° *On néglige les forces ordinaires pendant la percussion.* Elles sont en effet très petites relativement aux forces de percussion, et

ne déterminent qu'une variation négligeable de la vitesse du point percuté.

Ces conventions sont nécessaires par ce fait que les variations des forces percutantes ainsi que la durée de leurs actions, sont inconnues. Le plus souvent on ne peut constater que l'accroissement final de la vitesse du point percuté. C'est pour ce motif que l'on fait intervenir l'impulsion de la force au lieu de la force elle même et cela au moyen du théorème suivant : *L'impulsion de la force totale de percussion pendant la durée de son action, est égale à l'accroissement géométrique de la quantité de mouvement du point percuté.*

Fig. 133.

330. **Équations fondamentales.** — Soient $\bar{v}$ et $\bar{V}$ les vitesses du point aux instants initial et final de la percussion ; θ la durée de celle-ci ; $\bar{u}$ la vitesse qu'il faut composer avec $\bar{v}$ pour obtenir $\bar{V}$ et que nous appelons la *vitesse gagnée* ; m la masse du point percuté ; $\bar{F}$ la force totale percutante. Nous avons :

$$m\bar{V} - m\bar{v} = \int_0^\theta \bar{F}dt \quad \text{ou bien} \quad (1)\ m\bar{u} = \int_0^\theta \bar{F}dt,$$

ce qui conduit à ce nouvel énoncé : *L'impulsion de la force totale de percussion est égale à la quantité de mouvement gagnée.*

Cette équation est équivalente aux trois équations de projection sur les axes rectangulaires :

$$mu_x = \int_0^\theta Xdt, \quad mu_y = \int_0^\theta Ydt, \quad mu_z = \int_0^\theta Zdt.$$

Elles remplacent, dans cette théorie, les équations fondamentales du mouvement du point (128).

Si le point percuté n'est pas libre, il faut considérer l'impulsion de la force de liaison, parce qu'elle acquiert une intensité comparable à celle de la force percutante, pendant l'action de celle-ci.

Le mouvement d'un point matériel percuté comprend trois phases :

1° La période antérieure à la percussion, dont l'étude donne la position du mobile et la vitesse à l'instant initial de la percussion.

2° La percussion elle-même, dont l'étude se fait en appliquant la règle suivante : *Pendant la durée de la percussion, le point matériel est supposé immobile ; les forces ordinaires sont négli-*

gées, les obstacles et les liaisons sont remplacés par leurs réactions, et l'on écrit que la quantité de mouvement gagnée par le point est égale à l'impulsion de la force totale de percussion. Les trois équations qui en résultent déterminent, soit les composantes de la vitesse à l'instant final de la percussion, soit les composantes de l'impulsion de la force totale de percussion.

3° La phase postérieure à la percussion. Elle est étudiée d'après la méthode ordinaire, mais en partant des circonstances initiales donnée par la phase précédente.

Remarque. — Pour simplifier le langage, on se contente souvent de donner à l'impulsion de la force de percussion, le nom de percussion. On l'évalue en kilogrammes, comme la quantité de mouvement.

§ 2. *Étude générale des systèmes matériels percutés.*

331. Le problème du mouvement d'un système de points percutés se ramène à celui d'un point matériel libre, par l'introduction des forces de liaison. Elles transmettent à tout le système matériel, les percussions qui sont appliquées à quelques uns de ses points. Ce phénomène demande un temps déterminé pour sa réalisation; cependant nous admettons, comme une conséquence de sa durée inappréciable, *que toutes les percussions ont même durée.* De là une troisième convention, qui complète celles que nous avons admises pour le point percuté.

Soient $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{dz}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{dx}{dt}\right)_\theta$, $\left(\frac{dy}{dt}\right)_\theta$, $\left(\frac{dz}{dt}\right)_\theta$, les composantes, suivant les axes rectangulaires OXYZ, des vitesses $\overline{v}$ et $\overline{V}$ d'un point quelconque du système; X_t, Y_t, Z_t les composante de la force totale de percussion qu'il subit. Nous avons les trois équations :

$$m\left(\frac{dx}{dt}\right)_\theta - m\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \int_0^\theta X_t dt, \quad \text{ou} \quad mu_x = \int_0^\theta X_t dt,$$
$$m\left(\frac{dy}{dt}\right)_\theta - m\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = \int_0^\theta Y_t dt, \quad mu_y = \int_0^\theta Y_t dt,$$
$$m\left(\frac{dz}{dt}\right)_\theta - m\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = \int_0^\theta Z_t dt, \quad mu_z = \int_0^\theta Z_t dt.$$

Le raisonnement tenu au n° 199 permet de mettre les $3n$ équations analogues du système tout entier, sous la forme abrégée :

$$\Sigma\left[\frac{\delta x}{\delta t}mu_x+\frac{\delta y}{\delta t}mu_y+\frac{\delta z}{\delta t}mu_z\right]$$
$$=\Sigma\left[\frac{\delta x}{\delta t}\int_0^\theta X_t dt+\frac{\delta y}{\delta t}\int_0^\theta Y_t dt+\frac{\delta z}{\delta t}\int_0^\theta Z_t dt\right].$$

Supposons les vitesses virtuelles compatibles avec les liaisons; elles n'en restent pas moins indépendantes des limites d'intégration, par suite de l'immobilité du système percuté (329) et les termes relatifs aux percussions de liaison disparaissent de l'équation précédente. Celle-ci exprime dès lors l'*équivalence entre les impulsions des percussions directement appliquées et les quantités de mouvement gagnées par les points du système*, considéré comme *invariable* pendant la percussion. Cette équation conduit à la solution du problème général des percussions : *On donne les positions des points du système et leurs vitesses à l'instant initial de la percussion. On demande, soit les impulsions des forces de percussion directement appliquées, soit les vitesses à l'instant final de la percussion.*

En appliquant la méthode des vitesses virtuelles, comme au n° 202, on trouve les $3n - k$ équations, auxquelles on ajoute les dérivées totales, par rapport au temps, des équations de liaison, prises à l'instant final de la percussion, c'est-à-dire k équations de la forme :

$$\left(\frac{dL}{dt}\right)_\theta+\left(\frac{dL}{dx_1}\right)_\theta\left(\frac{dx_1}{dt}\right)_\theta+\left(\frac{dL_1}{dy_1}\right)_\theta\left(\frac{dy_1}{dt}\right)_\theta+\dots=0.$$

Nous formons ainsi un système de $3n$ équations où les inconnues sont, dans le premier cas, les $3n$ composantes des vitesses à l'instant final de la percussion, c'est-à-dire :

$$\left(\frac{dx_1}{dt}\right)_\theta,\ \left(\frac{dy_1}{dt}\right)_\theta,\ \left(\frac{dz_1}{dt}\right)_\theta\ \dots\dots$$

et dans le second, les $3n$ composantes des impulsions des forces de percussion directement appliquées.

332. Théorèmes généraux de la dynamique appliqués aux percussions. — Les théorèmes généraux s'établissent comme il

est dit en dynamique, mais en partant des équations de percussion. Nous obtenons trois équations analogues à la suivante :

$$M\left(\frac{dx_1}{dt}\right)_\theta - M\left(\frac{dx_1}{dt}\right)_0 = \Sigma \int_0^\theta X_e dt, \quad (210)$$

que l'on interprète en disant que la *vitesse gagnée par le centre de gravité d'un système matériel percuté, est la même que si toute la masse y était concentrée et s'il était soumis à toutes les percussions extérieures.*

De même, on trouve pour chaque axe des coordonnées, une équation de la forme :

$$\Sigma m\left(\frac{dx}{dt}\right)_\theta - \Sigma m\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = \Sigma \int_0^\theta X_e dt \text{ ou bien } \Sigma m u_x = \Sigma \int_0^\theta X_e dt,$$

De là ce théorème : *La quantité de mouvement totale gagnée par un système matériel percuté, projetée sur un axe fixe, est égale à la somme des impulsions des percussions extérieures, projetées sur le même axe.*

Enfin le théorème des moments, appliqué à l'axe OX pendant la durée de la percussion, donne :

$$\Sigma m\left[\left(\frac{dz}{dt}\right)_\theta - \left(\frac{dz}{dt}\right)_0\right] y - m\left[\left(\frac{dy}{dt}\right)_\theta - \left(\frac{dy}{dt}\right)_0\right] z$$
$$= \Sigma\left(y\int_0^\theta Z_e dt - z\int_0^\theta Y_e dt\right);$$

par conséquent le *moment résultant par rapport à un axe fixe des quantités de mouvement gagnées par un système matériel percuté, est égal au moment résultant des impulsions des percussions extérieures par rapport au même axe.*

333. Principe de la force vive. — Le théorème de la force vive prend une forme particulière, lorsqu'on sépare les travaux des forces de percussion extérieures, des travaux des forces de percussion intérieures.

On trouve :

$$\left(\frac{\Sigma m V^2}{2} + \pi_\theta\right) - \left[\frac{\Sigma m v^2}{2} + \pi_0\right) = \Sigma_0^\theta \, \mathrm{TrF}e.$$

Donc l'*accroissement de l'énergie totale d'un système matériel percuté est égal à la somme des travaux des forces de percus-*

sion extérieures. Lorsque celles-ci n'existent pas, l'énergie totale est constante, ce qui se présente dans certains cas particuliers, tels que les chocs.

Le théorème de la force vive. appliqué directement aux percussions, se déduit des équations de percussion des points du système rendus libres. On a les $3n$ équations :

$$m_1\left(\frac{dx_1}{dt}\right)_\theta - m_1\left(\frac{dx_1}{dt}\right)_0 = \int_0^\theta X_{1'}dt,$$
$$\vdots$$
$$m_n\left(\frac{dz_n}{dt}\right)_\theta - m_n\left(\frac{dz_n}{dt}\right)_0 = \int_0^\theta Z_{n'}dt.$$

Si nous les multiplions respectivement par $\left(\frac{dx_1}{dt}\right)_\theta$, $\left(\frac{dy_1}{dt}\right)_\theta$, ... $\left(\frac{dz_n}{dt}\right)_\theta$, il vient en les ajoutant :

$$(2) \quad \Sigma m \left\{ \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)_\theta^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)_\theta^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)_\theta^2\right] - \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)_\theta\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 + \left(\frac{dy}{dt}\right)_\theta\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 + \left(\frac{dz}{dt}\right)_\theta\left(\frac{dz}{dt}\right)_0\right] \right\}$$
$$= \Sigma \left\{ \left(\frac{dx}{dt}\right)_\theta \int_0^\theta X_t dt + \left(\frac{dy}{dt}\right)_\theta \int_0^\theta Y_t dt + \left(\frac{dz}{dt}\right)_\theta \int_0^\theta Z_t dt \right\}.$$

Or :

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_\theta^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)_\theta^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)_\theta^2 = V^2, \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)_0^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)_0^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)_0^2 = v^2,$$
$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_\theta\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 + \left(\frac{dy}{dt}\right)_\theta\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 + \left(\frac{dz}{dt}\right)_\theta\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = Vv \cos \widehat{Vv},$$

et le triangle des vitesses (*Fig.* 133), donne :

$$u^2 = V^2 + v^2 - 2vV \cos \widehat{vV} \quad \text{ou} \quad Vv \cos \widehat{Vv} = \frac{V^2 + v^2 - u^2}{2}.$$

En tenant compte de ces résultats dans l'équation (2), on obtient :

$$(3) \quad \frac{\Sigma m V^2}{2} - \frac{\Sigma m v^2}{2} = \Sigma \left\{ \left(\frac{dx}{dt}\right)_\theta \int_0^\theta X_t dt + \left(\frac{dy}{dt}\right)_\theta \int_0^\theta Y_t dt + \left(\frac{dz}{dt}\right)_\theta \int_0^\theta Z_t dt \right\} - \frac{\Sigma m u^2}{2},$$

d'où le théorème : *L'accroissement de la force vive totale d'un*

système matériel percuté, est égal à la somme des puissances des impulsions des forces de percussion, à l'instant final de leur action, diminuée de la somme des forces vives dues aux vitesses gagnées.

§ 3. *Théorie des chocs*

334. Définition. — *On dit qu'il y a choc, lorsque deux corps mobiles se rencontrent, par suite de leur tendance à occuper simultanément la même position de l'espace.* Pendant la durée très courte du phénomène, il se développe des réactions réciproques, souvent très grandes, qui sont des forces de percussion.

Le choc est dit *direct* quand les corps sont animés de mouvements de translation, qui font décrire aux centres de gravité, une même droite, normale commune aux surfaces qui viennent en contact. Les percussions ainsi engendrées passent par les centres de gravité, autour desquels elles ne provoquent aucune rotation. C'est le cas de deux sphères homogènes, animées de translations dirigées suivant la droite qui joint leurs centres.

Le choc est appelé *indirect* dans toutes les autres circonstances; il modifie les rotations autour des centres de gravité.

Remarque. — Les corps qui se choquent forment un système matériel où les percussions sont intérieures et dont l'énergie totale est constante.

335. Différentes phases du choc. — Le choc comprend deux phases : 1° La *compression*, pendant laquelle les corps en contact se meuvent l'un vers l'autre, en se déformant.

2° La *détente*, pendant laquelle les forces moléculaires, devenues répulsives, tendent à rendre aux corps leurs formes primitives.

L'examen de cette dernière phase permet de ranger les corps en trois catégories :

1° Les corps dits *parfaitement élastiques*, qui reprennent exactement leurs formes primitives à la fin de la détente.

2° Les corps *parfaitement mous*, qui n'ont pas de détente; les forces moléculaires ne réagissant plus, les corps restent déformés et continuent à se mouvoir accolés.

3° Les corps *imparfaitement élastiques*, caractérisés par une période de détente incomplète, pendant laquelle les forces molé-

culaires réagissent, mais insuffisamment pour rendre les formes primitives aux corps, qui restent plus ou moins déformés.

336. **Détermination de l'énergie cinétique perdue par suite du choc.** — Cette perte d'énergie s'évalue par le théorème de la force vive, appliqué pendant la durée du choc, au système matériel formé par les deux corps. Elle dépend de leur nature.

Théorème. — *La force vive totale du système matériel formé par deux corps parfaitement élastiques qui se choquent, reste constante.*

En effet, l'énergie totale est constante ; or à l'instant final de la détente, la figure du système et par suite son énergie potentielle sont les mêmes qu'à l'instant initial du choc. On en conclut l'égalité de l'énergie cinétique aux mêmes instants.

337. **Théorème de Carnot.** — *Le choc de deux corps parfaitement mous, produit une perte de force vive égale à la somme des forces vives dues aux vitesses gagnées par les points du système.*

En effet, toutes les impulsions des percussions sont intérieures au système et réciproques ; si donc $\bar{P}$ est l'une de celle-ci et l la distance des points d'application de deux percussions réciproques, nous aurons, avec les notations du n° 333 :

$$\Sigma \left\{ \left(\frac{dx}{dt}\right)_\theta \int_0^\theta \mathrm{X}dt + \left(\frac{dy}{dt}\right)_\theta \int_0^\theta \mathrm{Y}dt + \left(\frac{dz}{dt}\right)_\theta \int_0^\theta \mathrm{Z}dt \right\} = \Sigma \mathrm{P} \left(\frac{dl}{dt}\right)_\theta .$$

Or, les corps parfaitement mous restant déformés et accolés à l'instant θ final du choc, l devient constante, et $\left(\frac{dl}{dt}\right)_\theta = 0$. L'expression précédente s'annule donc et l'équation de la force vive appliquée aux percussions (333) donne :

$$\frac{\Sigma mv^2}{2} - \frac{\Sigma m\mathrm{V}^2}{2} = \frac{\Sigma mu^2}{2}.$$

338. **Corps imparfaitement élastiques.** — Le théorème de Carnot est applicable à tous les corps qui se choquent, lorsqu'on considère l'instant final de la compression. A partir de cette époque ils développent l'un sur l'autre de nouvelles réactions dues aux forces moléculaires devenues répulsives ; la force vive visible

est ainsi restituée pendant la détente, mais d'une façon incomplète pour les corps imparfaitement élastiques. La perte de force vive n'est donc qu'une fraction ε de la perte trouvée pour des corps parfaitement mous.

Quelle que soit d'ailleurs la nature des corps, la compression, ou le travail négatif des forces moléculaires, peut produire une diminution de force vive visible supérieure à celle qu'indiqueraient les formules : la différence se retrouverait sous forme de chaleur. Il y a transformation d'énergie cinétique en énergie thermique, qui peut être entièrement utilisée pendant la détente des corps parfaitement élastiques.

Pour les corps des autres catégories, et par conséquent pour les corps naturels, le phénomène se passe autrement. La déformation persiste après le choc, les molécules restent animées de mouvements oscillatoires qui les empêchent d'arriver immédiatement à leurs nouvelles positions d'équilibre, ce qui se manifeste par la production de chaleur, de son ou de lumière.

Les chocs, extrêmement pernicieux dans les machines, engendrent une perte de travail, désorganisent les articulations et sont une cause d'irrégularité. Ils sont d'ailleurs l'indice d'une construction peu soignée.

339. Choc direct de deux corps solides. Problème. — On donne : 1° *Deux corps solides qui se choquent directement ; 2° les vitesses initiale* $\overline{v}$ *et* $\overline{v'}$ *qu'ils possèdent. On demande les vitesses finales* $\overline{V}$ *et* $\overline{V'}$.

Nous appliquerons au système formé par les deux corps : 1° le théorème de la quantité de mouvement projetée sur la direction commune des translations ; 2° le théorème de la force vive pendant la durée du choc.

De là deux équations renfermant les inconnues V et V'. Nous examinerons successivement les différents cas que comporte la nature des corps.

340. Corps parfaitement élastiques. — Soient M et M' les masses des corps. Elles composent un système où n'existe pas de percussion extérieure et la quantité totale de mouvement conserve la même valeur pendant le choc. On a donc :

$$MV + M'V' = Mv + M'v' \quad \text{ou} \quad (1)\ M(V - v) = -M'(V' - v');$$

de plus la force vive totale est constante, puisque les corps sont parfaitement élastiques et il vient :

$$MV^2 + M'V'^2 = Mv^2 + M'v'^2 \text{ ou } (2)\ M(V^2 - v^2) = -M'(V'^2 - v'^2).$$

Des équations (1) et (2) nous tirons :

$$V = \frac{(M - M')v + 2M'v'}{M + M'}, \quad V' = \frac{2Mv + (M' - M)v'}{M + M'}.$$

Si $M = M'$, on trouve $V = v'$, $V' = v$, et les corps échangent leurs vitesses. Si M' est immobile et assez grand pour que l'on puisse négliger le rapport $\frac{M}{M'}$, on a $V = -v$, $V' = 0$. Le corps M' reste donc dans sa position, tandis que M prend une vitesse égale et directement opposée à celle qu'il possédait. C'est ce qui se passe quand une bille de billard est lancée normalement à la bande.

Nous généralisons les formules précédentes en considérant les vitesses algébriquement, d'après la convention adoptée pour le sens.

341. Corps parfaitement mous. — A l'instant final du choc les corps ont la même vitesse V et demeurent accolés. Le théorème de la quantité de mouvement donne l'équation :

$$Mv + M'v' = (M + M')V, \quad \text{d'où} \quad V = \frac{Mv + M'v'}{M + M'}.$$

En vertu du théorème de Carnot (337) la perte d'énergie cinétique due au choc est $\frac{1}{2}\left\{ M(V - v)^2 + M'(V - v')^2 \right\}$.

Elle s'exprime encore par la formule :

$$(2) \quad \frac{Mv^2}{2} + \frac{M'v'^2}{2} - \left(M + M'\right)\frac{V^2}{2}.$$

Supposons M' au repos, c'est-à-dire $v' = 0$, il vient :

$$V = \frac{Mv}{M + M'},$$

et l'énergie cinétique perdue a pour valeur :

$$\frac{Mv^2}{2} - \left(M + M'\right)\frac{V^2}{2} = \frac{Mv^2}{2}\,\frac{M'}{M + M'}.$$

C'est donc une fraction $\frac{M'}{M + M'}$ de l'énergie cinétique de la masse choquante, qui tend vers l'unité en même temps que $\frac{M}{M'}$ vers zéro. Elle sera d'autant plus petite que la masse choquante

sera plus grande par rapport à l'autre. En conséquence si l'on veut briser ou déformer un corps, il faut le frapper au moyen d'un marteau de petite masse, mais s'il faut éviter toute déformation, c'est l'inverse qu'il convient de faire. Ainsi le casseur de pierres se sert d'un petit marteau placé à l'extrémité d'une longue tige, de manière à donner à la masse choquante une grande vitesse et une grande force vive. Les proportions sont toutes différentes s'il s'agit d'un marteau pour enfoncer les clous ou d'un mouton destiné à battre les pieux.

342. Choc des corps imparfaitement élastiques. — Le théorème des quantités de mouvement projetées, donne l'équation :

$$(1)\quad Mv + M'v' = MV + M'V'.$$

Or l'énergie cinétique perdue est une fraction ε de ce qu'elle serait si les corps étaient parfaitement mous, par conséquent :

$$(2)\quad Mv^2 + M'v'^2 - MV^2 - M'V'^2 = \varepsilon\left[M\left(\frac{Mv+M'v'}{M+M'} - v\right)^2 + M'\left(\frac{Mv+M'v'}{M+M'} - v'\right)^2\right].$$

De ces équations on tire :

$$V = \frac{M'(v'-v)\sqrt{1-\varepsilon} + Mv + M'v'}{M+M'},\quad V' = \frac{M(v-v')\sqrt{1-\varepsilon} + Mv + M'v'}{M+M'}.$$

On retombe sur les formules relatives aux corps des deux premières catégories en faisant $\varepsilon = 0$, ou $\varepsilon = 1$ dans les valeurs précédentes.

Si le corps M' est au repos et de masse très grande par rapport au corps qui produit le choc, on a $v' = 0$, $\frac{M}{M'} = 0$, et les valeurs de V et de V' deviennent :

$$V' = 0,\quad V = -v\sqrt{1-\varepsilon}.$$

Cette relation donne un moyen de déterminer pratiquement ε. Il suffit de laisser tomber, d'une hauteur connue h, une bille sur une table horizontale et d'observer la hauteur H du ricochet. Abstraction faite de la résistance de l'air, on a en valeur absolue :

$$v = \sqrt{2gh},\quad V = -\sqrt{2gH},\quad \varepsilon = \frac{h-H}{h}.$$

Remarque. — Dans les numéros 340 à 342, on doit supposer que la variation de l'énergie thermique soit négligeable.

§ 4. *Application de la théorie des percussions aux corps solides*

343. Mouvement d'un solide possédant un axe fixe et percuté. Problème. — *On donne la position et la vitesse angulaire d'un solide tournant autour d'un axe fixe, et les impulsions des forces de percussion qui lui sont appliquées. On demande sa vitesse angulaire à l'instant final de la percussion.*

Reprenons les axes définis au n° 272 et soient x, y, z, les coordonnées du point d'application d'une percussion extérieure au corps ; X', Y', Z', les composantes de son impulsion ; U, V, W, U', V', W' les impulsions des réactions des points fixes ; ω_0, ω les vitesses angulaire à l'instant initial et à l'instant final de la percussion. Nous écrirons les équations d'équivalence entre les impulsions des percussions et les quantités de mouvement gagnées, en remarquant que les formules du n° 272 donnent :

$$\Sigma m\left(\frac{dx}{dt}\right)_\theta = -M\omega y_1, \quad \Sigma m\left(\frac{dy}{dt}\right)_\theta = M\omega x_1, \quad \Sigma m\left(\frac{dz}{dt}\right)_\theta = 0,$$
$$\Sigma m\left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = -M\omega_0 y_1, \quad \Sigma m\left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = M\omega_0 x_1, \quad \Sigma m\left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = 0.$$

Les équations deviennent donc :

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \Sigma X' + U + U' = -My_1(\omega - \omega_0),\\
&(2) \quad \Sigma Y' + V + V' = Mx_1(\omega - \omega_0),\\
&(3) \quad \Sigma Z' + W + W' = 0,\\
&(4) \quad \Sigma(Z'y - Y'z) - V'h = -E(\omega - \omega_0),\\
&(5) \quad \Sigma(X'z - Z'x) + U'h = -D(\omega - \omega_0),\\
&(6) \quad \Sigma(Y'x - X'y) = C(\omega - \omega_0).
\end{aligned}$$

La dernière équation détermine ω, les autres donnent les composantes des impulsions des réactions des appuis, mais avec les restrictions déjà faites, quant à W et W'. — Donc pour *étudier le mouvement d'un corps solide percuté tournant autour d'un axe fixe, on remplace les appuis par leurs réactions ; on établit les équations d'équivalence entre les quantités de mouvement gagnées et les impulsions des forces de percussion extérieures ou de réactions, en prenant l'axe fixe pour axe des* z, *et l'un des appuis pour origine. Les cinq premières équations servent au calcul des réactions, la sixième donne la vitesse angulaire à l'instant final de la percussion.*

344. Du centre de percussion. — *On appelle centre de percussion d'un solide possédant un axe fixe, le point où la percussion qui n'ébranlerait pas l'axe, rencontre le plan qui passe par celui-ci et le centre de gravité.*

Pour le déterminer, nous appliquerons les équations précédentes en annulant U, V, W, U', V', W' et en remplaçant $\Sigma X'$, $\Sigma Y'$, $\Sigma Z'$ par X', Y', Z'. Faisons de plus passer le plan des XZ par le centre de gravité, ce qui rend $y_1 = 0$ et supposons $\omega_0 = 0$, il vient :

$$(1)\ X' = 0, \quad (2)\ Y' = M\omega x_1, \quad (3)\ Z' = 0,$$
$$(4)\ Y'z = E\omega, \quad (5)\ D = 0, \quad (6)\ Y'x = C\omega = MR^2\omega,$$

R désignant le rayon de giration du corps relativement à l'axe fixe. Les équations (1) et (3) montrent que la percussion est parallèle à OY, c'est-à-dire perpendiculaire au plan mené par l'axe fixe et le centre de gravité. Si le plan des XY passe par cette percussion, $z = 0$ et l'on a :

$$(1')\ X' = 0, \quad (2')\ Y' = M\omega x_1, \quad (3')\ Z' = 0,$$
$$(4')\ E = 0, \quad (5')\ D = 0, \quad (6')\ Y'x = MR^2\omega.$$

Les relations (4') et (5') établissent que l'axe fixe est principal d'inertie, au point où il rencontre le plan perpendiculaire mené par la percussion. Cette dernière perce le plan des XZ au centre de percussion. Il se trouve sur l'axe des x à une distance de l'origine déduite de l'équation (6'), dans laquelle on a remplacé Y' par sa valeur tirée de (2'). Par suite :

$$x = \frac{R^2}{x_1}.$$

C'est précisément la longueur du pendule simple synchrone du pendule composé, que l'on formerait au moyen du corps solide et de l'axe fixe pris pour axe de suspension (280). Il en résulte pour x le même signe que pour x_1. Le centre de percussion et le centre de gravité sont donc toujours situés d'un même côté de l'axe fixe.

En résumé, les appuis d'un corps solide tournant autour d'un axe fixe ne réagissent pas quand il est soumis à une seule percussion, qui passe par le centre de percussion et est perpendiculaire au plan mené par le centre de gravité et l'axe fixe. Le centre de percussion se détermine par les opérations suivantes :

1° Mener un plan perpendiculaire à l'axe, au point où ce dernier est principal d'inertie. 2° Porter sur l'intersection de ce plan avec

le plan défini par l'axe et le centre de gravité et du même côté que celui-ci, une longueur égale à $\frac{R^2}{x_1}$.

Si l'axe fixe passe par le centre de gravité, $x_1 = 0$, $x = \infty$, $X' = 0$, $Y' = 0$. L'impossibilité, manifestée par ces résultats, prouve que toute percussion ébranle l'axe ; ce qui est évident *a priori*, en vertu du théorème du centre d'inertie.

Les propriétés du centre de percussion étaient utilisées autrefois dans la construction du marteau cingleur et du pendule balistique.

345. Problème. — *On donne une surface plane qui tourne autour d'un axe* OZ *situé dans son plan. On demande le centre de percussion.*

Ce point, ainsi que le centre de gravité, se trouvent dans le plan de la surface que nous prenons pour plan des XZ. La percussion est donc parallèle à OY et les coordonnées du centre de percussion sont déterminées par les équations précédentes dans lesquelles :

$$y = 0, \quad y_1 = 0, \quad D = 0,$$

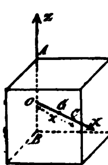
de sorte que :

$$X' = 0, \quad Y' = M\omega x_1, \quad Z' = 0, \quad Y'z = E\omega, \quad X'z = 0, \quad Y'x = C\omega,$$

d'où l'on tire :

$$z = \frac{E\omega}{Y'} = \frac{\omega \Sigma mxz}{M\omega x_1} = \frac{\Sigma mxz}{\Sigma mx}, \quad x = \frac{\Sigma mx^2}{\Sigma mx}.$$

346. Problème. — *On donne : 1° un cube homogène en fonte de 0m30 de côté, dont une arête verticale* AB *est fixe ; 2° l'impulsion d'une force de percussion égale à 1000 kilogrammes appliquée au cube de manière à ne provoquer aucune réaction des appuis. On demande : 1° la ligne d'action de la percussion ; 2° la vitesse angulaire du système à l'instant final de la percussion* (*Fig.* 134).


Fig. 134.

Supposons le cube immobile à l'instant initial et prenons l'origine des axes rectangulaires au point milieu de AB ; l'axe des z est dirigé suivant cette droite et l'axe des x passe par le centre de gravité du cube. La percussion est donc perpendiculaire au plan des ZX et est déterminée par le centre de percussion (344). Or l'axe des z est principal d'inertie au point O, pour lequel les conditions $D = 0$, $E = 0$, sont vérifiées,

par suite de la symétrie du cube par rapport au plan des XY. Le centre de percussion s'obtient donc par la relation $x = \frac{R^2}{x_1}$. Mais si a est le côté du cube, on a :

$$a = 0^m3, \quad R^2 = \frac{2a^2}{3} \ (268), \quad x_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}, \quad x = \frac{2a\sqrt{2}}{3} = 0^m,282.$$

La percussion est donc définie; elle est parallèle à l'axe OY et la vitesse angulaire qu'elle produit, résulte de l'équation :

$$Y'x = C\,(\omega - \omega_o),$$

mais $\omega_o = 0$, $C = \frac{2}{3}\rho a^5$, $\rho = \frac{7500}{g}$, $a = 0^m3$, $Y' = 1000^K$, donc :

$$\omega = \frac{Y'x}{C} = 227 \text{ m. ou } 37 \text{ tours par seconde.}$$

347. **Corps solide possédant un point fixe et percuté.** — *Pour étudier le mouvement du corps solide possédant un point fixe et percuté, on remplace ce dernier par sa réaction. On établit ensuite les six équations d'équivalence entre les quantités de mouvement gagnées et les impulsions des forces de percussion extérieures et de réaction, en prenant pour axes de coordonnées, les trois axes principaux d'inertie du point fixe, supposés immobiles. Les trois premières équations donnent les composantes de l'impulsion de la réaction : les trois autres définissent l'axe instantané de rotation à l'instant final de la percussion.*

Elles proviennent de l'intégration des équations des moments, données au n° 281 ; or la vitesse d'entraînement de l'index est nulle par suite de la fixité attribuée aux axes principaux d'inertie du point fixe. Elles deviennent donc :

$$A\,(p - p_o) = \Sigma\,(Z'y - Y'z),$$
$$B\,(q - q_o) = \Sigma\,(X'z - Z'x), \quad C\,(r - r_o) = \Sigma\,(Y'x - X'y).$$

On tire de ces équations les composantes p, q, r, de l'axe instantané à l'instant final de la percussion.

348. **Mouvement d'un corps solide libre et percuté.** — *Le mouvement d'un corps solide libre et percuté s'obtient en déterminant, à l'instant final de la percussion, la vitesse du centre de gravité et l'axe de la rotation instantanée ; la première par le*

théorème du centre de gravité appliqué aux percussions, le second par le théorème du moment résultant des quantités de mouvement par rapport aux axes principaux d'inertie, supposés fixes, du centre de gravité.

349. **Problème.** — *On donne un solide libre pesant, soumis à une percussion dirigée dans un plan contenant deux axes principaux d'inertie du centre de gravité. On demande son mouvement* (*Fig.* 135).

Fig. 135.

Admettons le corps immobile; soient M sa masse, P kilogrammes l'impulsion de la percussion. La vitesse $\overline{V}$ communiquée au centre de gravité résulte de l'équation géométrique

$$\overline{MV} = \overline{P}.$$

D'où il suit que ce point part avec la vitesse $\overline{V} = \frac{\overline{P}}{M}$ de la position qu'il occupait pendant la percussion et décrit sous l'action de son poids, une parabole connue (159).

De plus la percussion se fait dans un plan contenant deux des axes principaux d'inertie du centre de gravité. Elle engendre donc une rotation autour du troisième axe, par rapport auquel doit s'établir l'équation des moments pendant la durée de la percussion. Soient C le moment d'inertie correspondant, d le bras de levier, il vient :

$$C\omega = Pd,$$

d'où ω. Cette rotation reste constante dans la suite du mouvement, car le poids du corps ne peut la modifier, et c'est la seule force extérieure, abstraction faite de la résistance de l'air. Le mouvement du corps, après la percussion, résulte des deux mouvements simultanés que nous venons de déterminer.

350. **Remarque.** — Toute percussion produite sur un corps sphérique homogène, se trouve dans un plan contenant deux des axes principaux d'inertie du centre de gravité. Si la sphère est immobile, la rotation s'effectue autour du diamètre perpendiculaire au plan déterminé par le centre et la percussion. C'est une des causes de l'irrégularité du tir des canons lisses. La percussion due à la déflagration de la charge, est en effet variable avec les circonstances du chargement.

351. **Problème.** — On donne : 1° *Un treuil horizontal immobile, auquel est appliqué un poids* Q *par l'intermédiaire d'un fil sans masse ; 2° un poids* Q′ *abandonné librement à une hauteur* h *au-dessus de* Q, *qu'il rencontre directement. On demande la vitesse angulaire du treuil à l'instant final du choc* (*Fig.* 136) ?

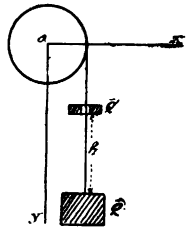


Fig. 136.

Le système est à figure déformable et la méthode des réactions s'impose. Les parties indéformables sont le treuil et le poids Q ; ils sont reliés par le fil, que l'on remplace par sa tension. Soient $\overline{U}$ et $\overline{T}'$, les impulsions dues au choc et à la tension. Ce sont les seules percussions et comme leurs impulsions sont verticales, nous prendrons l'axe des y vertical, l'axe des z étant dirigé suivant l'axe du treuil. La vitesse angulaire résulte donc de l'équation (6) du n° 343 qui devient ici :

$$(1) \quad C\omega = T'r.$$

Mais Q percuté, ne donne qu'une équation de projection sur l'axe OY, savoir :

$$(2) \quad U - T' = \frac{Q}{g} r\omega.$$

D'ailleurs, l'impulsion U, directement opposée à celle que reçoit le corps Q′, est mesurée par la quantité de mouvement gagnée par Q′, changée de sens (329). Or, à l'instant initial du choc, la vitesse de translation du corps Q′ est $v' = \sqrt{2gh}$; à l'instant final, cette vitesse, encore verticale, est égale à ωr, si nous assimilons Q et Q′ à des corps parfaitement mous. Dans ces conditions :

$$(3) \quad U = \frac{Q'}{g}(\sqrt{2gh} - r\omega),$$

et l'équation (2) s'écrit :

$$(4) \quad \frac{Q'}{g}(\sqrt{2gh} - r\omega) = \frac{Q}{g} r\omega + T'.$$

En éliminant T′ entre (1) et (4), il vient :

$$\omega = \frac{\frac{Q'}{g}\sqrt{2gh}}{\frac{Q+Q'}{g} r + \frac{C}{r}}.$$

Dans l'hypothèse de corps parfaitement élastiques, le corps Q′

prendrait à la fin de la percussion, une vitesse inconnue V′ et nous aurions :

$$(3) \quad U = \frac{Q'}{g} (\sqrt{2gh} - V').$$

De là quatre inconnues : ω, T′, V′, U. Aux équations (1), (2), (3), nous ajouterions alors une quatrième relation, en écrivant que la force vive totale du système composé du treuil et des poids Q et Q′ reste constante pendant le choc. On aurait donc :

$$\omega^2 C + \frac{Q}{g} \omega^2 r^2 + \frac{Q'}{g} V'^2 = \frac{Q'}{g} 2gh.$$

Pour les corps imparfaitement élastiques, il faudrait tenir compte de la perte de force vive (342).

CHAPITRE XXX

DE LA SIMILITUDE MÉCANIQUE

352. *Deux points matériels* M *et* M′ *ont des mouvements mécaniquement semblables, quand leurs vitesses, considérées après des temps* t *et* t′ *pris à partir de l'origine du mouvement, dans le rapport constant* τ, *sont parallèles, de même sens, et dans le rapport constant* v. Les positions des points à ces deux époques, sont dites *homologues*.

Théorème. *Les trajectoires de deux points qui ont les mouvements mécaniquement semblables, sont semblables et dans le rapport* $l = v\tau$ (*Fig.* 137).

Fig. 137.

Soient M_0, M'_0 les positions homologues des points aux époques t et t', M et M′ les positions homologues aux époques $t + \Delta t$, $t' + \Delta t'$. Par définition :

$$\frac{t}{t'} = \tau, \quad \frac{t + \Delta t}{t' + \Delta t'} = \tau, \text{ donc } \frac{\Delta t}{\Delta t'} = \tau.$$

Quel que soit Δt, la droite M M′ rencontre $M_0 M'_0$ en un point fixe O, tel que le rapport $\frac{MO}{M'O}$ soit constant. Cela revient à prouver que les cordes M_0 M et M'_0 M′, sont parallèles et dans un rapport constant.

En effet, x, y, z; x', y', z' étant les coordonnées des points M_0

et M'_0 ; $x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z$; $x' + \Delta x', y + \Delta y', z' + \Delta z'$ les coordonnées des points M et M' ; les projections des cordes $M_0 M$, $M'_0 M'$ sur les axes seront $\Delta x, \Delta y, \Delta z$; $\Delta x', \Delta y', \Delta z'$. Or :

$$\Delta x = \frac{dx}{dt}\Delta t + \frac{d^2x}{dt^2}\frac{\Delta t^2}{1.2} + \frac{d^3x}{dt^3}\frac{\Delta t^3}{1.2.3} + \dots$$

$$\Delta x' = \frac{dx'}{dt'}\Delta t' + \frac{d^2x'}{dt'^2}\frac{\Delta t'^2}{1.2} + \frac{d^3x'}{dt'^3}\frac{\Delta t'^3}{1.2.3} + \dots\dots$$

$$\Delta t = \tau\Delta t', \ \Delta t^2 = \tau^2\Delta t'^2, \dots\dots$$

et dans les positions homologues, les vitesses sont parallèles et dans le rapport constant v, il vient par conséquent :

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dx'}{dt'}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dy'}{dt'}} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\frac{dz'}{dt'}} = v;$$

d'où l'on tire :

$$\frac{dx}{dt} = v\frac{dx'}{dt'}, \ \frac{d^2x}{dt} = v\frac{d.\frac{dx'}{dt'}}{dt'}\frac{dt'}{dt} = \frac{v}{\tau}\frac{d^2x'}{dt'^2}, \dots\dots$$

En partant de de ces résultats on trouve :

$$\Delta x = v\tau\left(\frac{dx'}{dt'}\Delta t' + \frac{d^2x'}{dt'^2}\frac{\Delta t'^2}{1.2} + \dots\right) = v\tau\,\Delta x',$$

ou bien

$$\frac{\Delta x}{\Delta x'} = v\tau,$$

On aurait de même :

$$\frac{\Delta y}{\Delta y'} = \frac{\Delta z}{\Delta z'} = v\tau = l.$$

De l'égalité de ces rapports, on conclut que les cordes sont parallèles et dans le rapport constant l.

Les conditions auxquelles les forces doivent satisfaire pour maintenir la similitude mécanique, résultent des relations entre les accélérations, déduites des équations précédentes. Ce sont :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{v}{\tau}\frac{d^2x'}{dt'^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{v}{\tau}\frac{d^2y'}{dt'^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{v}{\tau}\frac{d^2z'}{dt'^2}.$$

On en tire, en désignant par μ le rapport $\frac{m}{m'}$ des masses des deux points :

$$\frac{m\frac{d^2x}{dt^2}}{m'\frac{d^2x'}{dt'^2}} = \frac{m\frac{d^2y}{dt^2}}{m'\frac{d^2y'}{dt'^2}} = \frac{m\frac{d^2z}{dt^2}}{m'\frac{d^2z'}{dt'^2}} = \frac{\mu}{\tau^2}.$$

Or :

$$m\frac{d^2x}{dt^2},\quad m\frac{d^2y}{dt^2},\quad m\frac{d^2z}{dt^2},\quad m'\frac{d^2x'}{dt'^2},\quad m'\frac{d^2y'}{dt'^2},\quad m'\frac{d^2z'}{dt'^2},$$

sont les composantes suivant les axes, des forces totales agissant sur les points dans leurs positions homologues.

Ces forces sont donc parallèles, de même sens, et dans un rapport constant f, dont la valeur est $\frac{\mu l}{\tau^2}$.

De là le théorème : *Les mouvements de deux points matériels sont mécaniquement semblables, quand les vitesses sont parallèles et de même sens à l'instant initial et qu'il en est de même des forces totales dans les positions homologues, pour lesquelles elles doivent satisfaire à la relation* $f = \frac{\mu l}{\tau^2}$.

Remarque. Le parallélisme des vitesses dans les positions homologues suppose les trajectoires semblablement disposées. Si elles ne l'étaient pas, il suffirait de les ramener par la pensée dans cette situation.

353. **Similitude mécanique des systèmes matériels.** — Deux systèmes matériels sont *géométriquement semblables et semblablement disposés*, quand les points du premier ont tous leurs homologues dans le second, de telle façon que la droite joignant deux points du premier système soit parallèle à la droite joignant les points homologues du second et dans un rapport constant l.

Les systèmes sont dits *matériellement semblables* quand les masses des points homologues sont dans le rapport constant μ.

Ils sont *cinématiquement semblables* à un instant donné, par exemple à l'origine du mouvement, lorsque les vitesses des points du premier système sont parallèles aux vitesses des homologues du second, de même sens, et dans un rapport constant v.

Enfin les systèmes sont dits *mécaniquement semblables*, quand les conditions de la similitude géométrique, cinématique et matérielle étant vérifiées à l'origine du mouvement, elles le sont encore, soit après un temps quelconque; soit, plus généralement après deux temps différents, t pour le premier système, t' pour le second, le rapport $\frac{t}{t'} = \tau$ restant constant ainsi que les rapports l, μ et v.

La similitude mécanique de deux systèmes matériels entraîne celle des trajectoires de deux points homologues quelconques, mais avec cette condition nouvelle que *le rapport de similitude des trajectoires est égal au rapport de similitude des systèmes.*

Considérons, en effet, deux points M et M_1 du premier système dans les positions A et B qu'ils occupent à l'instant t et soient A′, B′, les positions des points homologues M′, M'_1 du second système à l'instant t' donné par la relation $\frac{t}{t'} = \tau$ (*Fig.* 138). Par suite de la similitude géométrique, nous avons : $\frac{AB}{A'B'} = l$.

Si nous passons à l'instant $t + \Delta t$, les positions des points M et M_1 sont C et D; les positions des points homologues à l'instant $t' + \Delta t'$ donné par le rapport $\frac{t + \Delta t}{t' + \Delta t'} = \tau$, sont C′ et D′. La similitude géométrique n'ayant pas cessé d'exister, nous avons encore :

Fig. 138.

$$\frac{CD}{C'D'} = l.$$

Mais les trajectoires des points M et M_1 pendant le temps Δt sont semblables aux trajectoires des points homologues M′ et M'_1 pendant le temps $\Delta t'$; les cordes AC et BD sont donc parallèles aux cordes A′C′ et B′D′ et les côtés du quadrilatère ABCD sont parallèles aux côtés correspondants de A′B′C′D′. Comme $\frac{AB}{A'B'} = \frac{CD}{C'D'}$, ces deux figures sont semblables. Il en résulte que le rapport $\frac{AC}{A'C'}$ des trajectoires est égal au rapport $\frac{AB}{A'B'}$ des systèmes. De là ce théorème : Deux systèmes matériellement semblables et semblablement disposés sont mécaniquement semblables quant 1° *à l'instant initial les vitesses des points homologues sont parallèles, de même sens et dans le rapport constant* $v = \frac{l}{\tau}$; 2° *les forces totales agissant sur ces points dans les positions homologues sont parallèles, de même sens et satisfont à la relation* $f = \frac{\mu l}{\tau^2}$.

Si les systèmes matériels sont solides ou composés de solides, les forces directement appliquées et les résistances passives seules, doivent intervenir dans le théorème, puisque seules, elles entrent dans l'équation générale du mouvement (202).

354. Remarque. — La théorie de la similitude mécanique est applicable à l'industrie et à la balistique. S'il s'agit de l'invention d'une machine dont la construction serait coûteuse, il sera souvent possible d'expérimenter sur un modèle à petite échelle, de manière à prévoir les conditions de fonctionnement de la machine réelle.

Supposons que ce soit une locomotive. Nous construirons à l'échelle l, un modèle géométriquement et matériellement semblable. Le rapport μ des masses est égal à l^3 puisque les mêmes matériaux sont employés. Examinons s'il y a moyen de réaliser la similitude mécanique.

Le rapport des poids étant l^3, il faut que $f = l^3$, or la relation $f = \frac{\mu l}{\tau^2}$ donne alors : $\tau = \sqrt{l}$,

d'où : $$l = v\,\tau = v\sqrt{l}, \text{ et } v = \sqrt{l}.$$

Tous les éléments nécessaires à la solution du problème sont donc déterminés. Il reste à vérifier la condition $f = l^3$. Dans ce but, examinons les différentes forces extérieures, abstraction faite des poids; nous avons :

1° Les pressions totales de la vapeur sur les pistons. Comme elles doivent être dans le rapport l^3, et que les surfaces des pistons sont dans le rapport l^2, il est nécessaire que les pressions rapportées à l'unité de surface, soient dans le rapport l.

2° Les résistances de l'air. Ce sont des forces proportionnelles aux surfaces et aux carrés des vitesses ; elles sont dans le rapport l^3.

3° Les frottements de glissement satisfont à la condition demandée, puisqu'ils sont proportionnels aux pressions.

4° Les frottements de roulement sont proportionnels aux pressions et dans le rapport inverse des diamètres, c'est-à-dire dans le rapport l^2. Ils sont proportionnellement plus grands, que dans la machine projetée. Nous ne pouvons donc réaliser complètement la similitude mécanique, mais nous pouvons cependant assurer que la locomotive aura un rendement supérieur à celui du modèle.

CHAPITRE XXXI.

DE L'ATTRACTION.

355. Les actions réciproques de deux points matériels sont proportionnelles aux masses et en raison inverse du carré de leur distance (166). Soit f l'action de l'unité de masse sur l'unité de masse placée à l'unité de distance ; par convention, cette quantité est positive quand il y a attraction, négative quand il y a répulsion. Il en résulte que deux points M et M′, de masses m et m', placés à une distance u l'un de l'autre, développent des actions réciproques qui ont pour intensité $f\frac{mm'}{u^2}$. Si x, y, z ; x', y', z' sont les coordonnées de ces deux points, les projections de l'attraction du premier sur le second seront :

$$f\frac{mm'}{u^2}\frac{x-x'}{u},\quad f\frac{mm'}{u^2}\frac{y-y'}{u},\quad f\frac{mm'}{u^2}\frac{z-z'}{u}.$$

356. Attraction d'un corps matériel sur un point matériel. — Le point matériel M′ est soumis à l'action d'un corps matériel composé des points M_1, M_2, M_3... ; chacun d'eux développe sur le point M′ une force analogue à celle que nous venons de calculer. Elles ont toutes le même point d'application et les projections de la résultante sur les axes rectangulaires de coordonnées sont :

$$X = \Sigma f\frac{mm'}{u^2}\frac{x-x'}{u} = fm'\Sigma m\frac{x-x'}{u^3},$$
$$Y = fm'\Sigma m\frac{y-y'}{u^3},\quad Z = fm'\Sigma m\frac{z-z'}{u^3}.$$

Mais :

$$u^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2,$$
$$\frac{du}{dx'} = \frac{x'-x}{u},\quad \frac{du}{dy'} = \frac{y'-y}{u},\quad \frac{du}{dz'} = \frac{z'-z}{u},$$

$$\frac{d.\frac{1}{u}}{dx'} = \frac{x-x'}{u^3},\quad \frac{d.\frac{1}{u}}{dy'} = \frac{y-y'}{u^3},\quad \frac{d.\frac{1}{u}}{dz'} = \frac{z-z'}{u^3},$$

donc

$$X = fm'\Sigma m\frac{d.\frac{1}{u}}{dx'} = fm'\frac{d.\Sigma\frac{m}{u}}{dx'},$$

$$Y = fm' \frac{d \,.\, \Sigma \frac{m}{u}}{dy'}, \quad Z = fm' \frac{d \,.\, \Sigma \frac{m}{u}}{dz'}.$$

Dans ces relations $fm' \Sigma \frac{m}{u}$ est le potentiel (151), mais on le rapporte ordinairement à une attraction égale à l'unité pour l'unité de distance. Le potentiel devient alors $\Sigma \frac{m}{u}$; on le représente par π et il vient :

$$X = fm' \frac{d\pi}{dx'}, \quad Y = fm' \frac{d\pi}{dy'}, \quad Z = fm' \frac{d\pi}{dz'}.$$

Dans les applications, nous admettons la continuité de la matière et nous remplaçons le signe Σ par l'intégrale.

357. Attraction d'un corps matériel sur un point matériel très éloigné. — Appliquons les formules du n° 356 en prenant l'origine au centre de gravité du corps et en faisant passer l'axe OX par le point donné M' (*Fig.* 139). Un point quelconque du corps est à une distance r de O, à une distance u de M' et δ est la distance OM'. Posons $q = 2\delta r \cos \varphi - r^2$, le triangle OMM' donne :

Fig. 139.

$$u^2 = \delta^2 + r^2 - 2\delta r \cos \varphi = \delta^2 - q,$$

$$\frac{1}{u} = (\delta^2 - q)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\delta} + \frac{1}{2}\frac{1}{\delta^3} q + \ldots = \frac{1}{\delta} + \frac{r \cos \varphi}{\delta^2},$$

à la condition de pouvoir négliger les termes qui renferment au dénominateur δ à une puissance supérieure à la seconde. Le potentiel prend alors la forme suivante :

$$\pi = \int \frac{dm}{u} = \int \frac{dm}{\delta} + \int \frac{r \cos \varphi \, dm}{\delta^2}.$$

Mais des formules du centre de gravité, on tire :

$$\int \frac{dm}{\delta} = \frac{M}{\delta}, \quad \int \frac{r \cos \varphi \, dm}{\delta^2} = \frac{1}{\delta^2} \int x dm = \frac{1}{\delta^2} M x_1 = 0,$$

car $x = r \cos \varphi$, $x_1 = 0$. Il vient $\pi = \frac{M}{\delta}$ et comme $x' = \delta$, on trouve :

$$\frac{d\pi}{dx'} = -\frac{M}{\delta^2}, \quad \frac{d\pi}{dy'} = 0, \quad \frac{d\pi}{dz'} = 0;$$

$$X = -f \frac{m'M}{\delta^2}, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

Donc un corps matériel attire un point extérieur, situé à une distance très grande par rapport à ses dimensions, comme si toute sa masse se trouvait au centre de gravité.

Ce résultat s'applique à deux corps très éloignés, en admettant leurs masses concentrées aux centres de gravité.

358. Problème. — *Attraction d'une sphère ou d'une couche sphérique homogène sur un point matériel (Fig. 140).*

Conservons les notations et les axes du numéro précédent. Les coordonnées du point M′ sont $x' = \delta$, $y' = 0$, $z' = 0$. L'attraction à laquelle il est soumis est dirigée suivant l'axe OX par raison de symétrie, donc :

Fig. 140.

$$X = fm' \frac{d\pi_1}{dx'}, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

Or si ρ est la densité

$$\pi_1 = \int_3 \frac{\rho r^2 dr \sin\varphi \, d\varphi \, d\psi}{\sqrt{\delta^2 + r^2 - 2\delta r \cos\varphi}} = 2\pi\rho \int_{R_1}^{R_2} r dr \int_0^\pi \frac{r \sin\varphi \, d\varphi}{\sqrt{\delta^2 + r^2 - 2\delta r \cos\varphi}}.$$

Deux hypothèses se présentent alors. Si le point est extérieur à la couche, r est plus petit que δ et l'on a :

$$\int_0^\pi \frac{r \sin\varphi \, d\varphi}{\sqrt{r^2 + \delta^2 - 2r\delta \cos\varphi}} = \frac{1}{\delta}\Big[(\delta + r) - (\delta - r)\Big] = \frac{2r}{\delta},$$

$$\pi_1 = 2\pi\rho \int_{R_1}^{R_2} \frac{2r^2 dr}{\delta} = \frac{4}{3}\pi\rho \frac{R_2^3 - R_1^3}{\delta} = \frac{M}{\delta},$$

$$\frac{d\pi_1}{dx'} = -\frac{M}{\delta^2}, \quad \frac{d\pi_1}{dy'} = 0, \quad \frac{d\pi_1}{dz'} = 0,$$

$$X = -f\frac{Mm'}{\delta^2}, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

Si le point est intérieur, $r > \delta$ et il vient :

$$\int_0^\pi \frac{r \sin\varphi \, d\varphi}{\sqrt{}} = \frac{1}{\delta}\left[(\delta + r) - (r - \delta)\right] = 2,$$

$$\pi_1 = 4\pi\rho \int_{R_1}^{R_2} r dr = 2\pi\rho\,(R_2^2 - R_1^2),$$

$$\frac{d\pi_1}{dx'} = 0, \quad \frac{d\pi_1}{dy'} = 0, \quad \frac{d\pi_1}{dz'} = 0,$$
$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

Donc une sphère ou une couche sphérique homogène attire les points extérieurs, comme si sa masse était concentrée en son centre, mais n'exerce aucune action sur les points qui se trouvent dans le noyau intérieur.

Cette propriété subsiste encore quand la densité de la sphère est simplement fonction du rayon.

Considérons maintenant un point matériel placé dans la couche sphérique. Il est attiré par la partie de celle-ci qui est limitée à la sphère de rayon OM passant par ce point, et l'on a :

$$X = -\frac{4}{3}\pi\rho f\left(\frac{OM^3 - R_1^3}{3}\right)\frac{m'}{OM^2}.$$

Pour une sphère massive $R_1 = 0$ et $X = -f\rho m' \frac{4}{3}\pi\, OM$.

Par conséquent : ***L'attraction d'une sphère homogène sur un point qui en fait partie, est proportionnelle à la distance de ce dernier au centre.***

LIVRE V

CHAPITRE XXXII

MÉCANIQUE DES FLUIDES

§ 1. *Principes fondamentaux*

359. Définitions. — On donne le nom de *fluides parfaits* à des corps matériels dont les molécules glissent les unes sur les autres sans frottement. Ils n'offrent pas de résistance à la déformation, tandis que les fluides matériels plus ou moins visqueux, engendrent la *cohérence* qui s'oppose au glissement des molécules les unes sur les autres et l'*adhérence* qui s'oppose au glissement sur les parois. Ces frottements sont très faibles et les lois établies pour les fluides parfaits, s'appliquent avec une approximation souvent suffisante, aux fluides naturels.

Nous distinguerons les *liquides* et les *gaz*.

Un liquide parfait est un fluide incompressible, non dilatable d'une manière absolue, et de densité constante.

Un gaz parfait est un fluide indéfiniment compressible ou dilatable, et qui suit à température constante la loi de Mariotte, de sorte que la densité varie proportionnellement à la pression.

Certains liquides naturels, tels que l'eau, le mercure, se rapprochent beaucoup des liquides parfaits ; de même certains gaz, l'air, l'hydrogène, ont pratiquement les propriétés des gaz parfaits. En principe, l'assimilation des gaz naturels et des vapeurs aux gaz parfaits, est d'autant plus justifiée, qu'ils sont plus éloignés de leurs points de liquéfaction.

On rencontre encore des corps visqueux semi-fluides, tels que les huiles, les graisses, qui tiennent le milieu entre les solides et les liquides. Ils jouissent de propriétés intermédiaires.

360. Pression. — Imaginons une surface S divisant la masse fluide en deux parties A et B. Pour isoler A, il faut faire intervenir

les forces qui produisent sur A, les mêmes actions que B. Ce sont les pressions de B sur A. Elles représentent les actions moléculaires, développées normalement à la surface considérée, par suite de l'absence de frottement. Si la surface est plane, ces forces ont une résultante équivalente et qui lui est normale.

Si nous désignons par $\overline{\Delta P}$ la pression résultante, par Δs l'aire plane correspondante, la pression moyenne est $\frac{\overline{\Delta P}}{\Delta s}$ et nous définirons la pression en un point, comme la limite de la pression moyenne sur un élément de surface renfermant le point, et convergeant vers celui-ci. C'est donc la *pression au point considéré, rapportée à l'unité de surface ou au mètre carré.*

361. Principes fondamentaux de la Mécanique des fluides. — 1° *La pression en un point quelconque d'un fluide parfait est normale à la surface sur laquelle elle s'exerce.*

Cette propriété, conséquence de la définition des fluides parfaits, s'applique aussi aux fluides naturels en équilibre, parce que l'expérience prouve que dans ces systèmes, le frottement s'annule en même temps que la vitesse.

2° *La pression en un point d'un fluide parfait est la même dans tous les sens, quelle que soit la direction de la surface passant par ce point.*

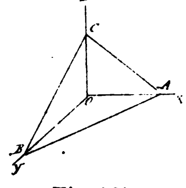


Fig. 141.

Prenons le point considéré pour origine des axes rectangulaires OXYZ (*Fig.* 141). Un plan ABC forme avec les plans des coordonnées un tétraèdre, que nous isolons du fluide environnant au moyen des pressions $\overline{\Delta P}$, $\overline{\Delta P'}$, $\overline{\Delta P''}$, $\overline{\Delta P'''}$, normales aux faces BOC, COA, BOA et CBA.

Soient λ, μ, ν, les angles directeurs de $\overline{\Delta P'''}$; $\overline{\Delta F}$ la résultante des forces directement appliquées au tétraèdre; ΔV son volume; ΔM sa masse. Le principe de la quantité de mouvement, appliqué au système, donne les trois équations de projection :

$$\Delta P + \Delta P''' \cos\lambda + \Delta F_x = \Sigma m \frac{d^2x}{dt^2},$$

$$\Delta P' + \Delta P''' \cos\mu + \Delta F_y = \Sigma m \frac{d^2y}{dt^2},$$

$$\Delta P'' + \Delta P''' \cos\nu + \Delta F_z = \Sigma m \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Désignons par Δs l'aire de la face CBA et soient Δx, Δy, Δz, les longueurs des arêtes OA, OB, OC, il vient :

$$\cos\lambda = -\frac{\Delta y \Delta z}{2\Delta s}, \quad \cos\mu = -\frac{\Delta x \Delta z}{2\Delta s}, \quad \cos\nu = -\frac{\Delta x \Delta y}{2\Delta s}.$$

Ne considérons que la première des équations, nous aurons :

$$\Delta P - \frac{\Delta P'''}{\Delta s}\frac{\Delta y \Delta z}{2} + \Delta F_x = \Sigma m \frac{d^2x}{dt^2},$$

ou bien en introduisant ΔV :

$$(1) \quad \Delta P - \frac{\Delta P'''}{\Delta s}\frac{\Delta z \Delta y}{2} + \frac{\Delta F_x}{\Delta M}\frac{\Delta M}{\Delta V}\frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{6} = \frac{\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2}}{\Delta M}\frac{\Delta M}{\Delta V}\frac{\Delta x \Delta y \Delta z}{6}.$$

Divisons les deux membres de l'équation par $\frac{\Delta z \Delta y}{2}$ et passons à la limite pour le tétraèdre convergeant vers le point O. Il vient par définition :

$$\text{Lim}\left(\frac{\Delta P}{\frac{\Delta z \Delta y}{2}}\right)_{\Delta V \equiv 0} = p, \quad \text{Lim}\left(\frac{\Delta P'''}{\Delta s}\right)_{\Delta s \equiv 0} = p''',$$

$$\text{Lim}\left(\frac{\Delta M}{\Delta V}\right)_{\Delta V \equiv 0} = \rho.$$

De plus :

$$\text{Lim}\left(\frac{\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2}}{\Delta M}\right)_{\Delta V \equiv 0} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \text{Lim}\, \Delta X = 0.$$

En vertu de ces résultats l'équation (1) devient à la limite :

$$p - p''' = 0.$$

On aurait de même :

$$p' - p'' = 0, \quad p'' - p''' = 0.$$

Donc :

$$p = p' = p'' = p'''.$$

Cette propriété appartient aussi aux *fluides naturels* en équilibre, parce que le frottement y est nul.

§ 2. *Hydrodynamique*

362. ***L'hydrodynamique est la science qui a pour objet l'étude du mouvement des fluides parfaits.***

Le problème à résoudre est le suivant : ***On donne les circon-***

stances initiales du mouvement de la masse fluide, les forces extérieures qui la sollicitent et l'état particulier de sa surface ; on demande la position de chaque point, sa vitesse, sa pression et sa densité à un instant quelconque.

Les circonstances initiales du mouvement sont les positions, les vitesses, les pressions, les densités des points du système à l'instant initial. Prenons trois axes rectangulaires de coordonnées. A l'instant t un point du fluide se trouve dans la position M définie par les coordonnées x, y, z ; les composantes de sa vitesse sont u, v, w ; enfin la pression et la densité en ce point, rapportées à l'unité de surface et à l'unité de volume, sont p et ρ. La solution complète du problème exige la détermination de u, v, w, p, ρ. Ces quantités varient non seulement avec le temps, mais encore avec la position du point, c'est-à-dire avec x, y, z. Ce sont des fonctions continues de ces variables.

363. Équations du mouvement. — Imaginons au point O du fluide un parallélépipède rectangle dont les arêtes soient Δx, Δy, Δz, parallèles aux axes (*Fig.* 142). Le fluide qu'il renferme est isolé au moyen des pressions normales produites sur les faces et nous pourrons lui appliquer les équations (2) du n° 209. Si $\overline{\Delta P}$ et $\Delta P'$ sont les pressions sur la face OABC et son opposée, nous aurons avec les notations connues :

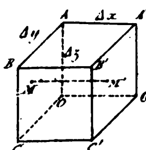


Fig. 142.

$$(1) \quad \Delta P - \Delta P' + \Delta F_x = \Sigma m \frac{d^2x}{dt^2},$$

ou bien :

$$\frac{\Delta P - \Delta P'}{\Delta x \Delta y \Delta z} + \frac{\Delta F_x}{\Delta M}\frac{\Delta M}{\Delta V} = \frac{\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2}}{\Delta M}\frac{\Delta M}{\Delta V}.$$

Passons à la limite, en faisant converger le parallélépipède vers O, il vient :

$$\operatorname{Lim}\left(\frac{\Sigma m \frac{d^2x}{dt^2}}{M}\right)_{\Delta V \equiv 0} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \operatorname{Lim}\left(\frac{\Delta M}{\Delta V}\right)_{\Delta V \equiv 0} = \rho,$$

$$\operatorname{Lim}\left(\frac{\Delta P - \Delta P'}{\Delta x \Delta y \Delta z}\right)_{\Delta V \equiv 0} = -\operatorname{Lim}\left(\frac{\frac{\Delta P'}{\Delta y \Delta z} - \frac{\Delta P}{\Delta y \Delta z}}{\Delta x}\right)_{\Delta V \equiv 0} = -\frac{dp}{dx},$$

car si p est la pression au point O, on a :

$$\mathrm{Lim}\left(\frac{\Delta P'}{\Delta y \Delta z}\right)_{\Delta y \Delta z \equiv 0} = p + \Delta p, \quad \mathrm{Lim}\left(\frac{\Delta P}{\Delta y \Delta z}\right)_{\Delta y \Delta z \equiv 0} = p.$$

Posons enfin :

$$\mathrm{Lim}\left(\frac{\Delta F_x}{\Delta M}\right)_{\Delta V \equiv 0} = X, \quad \mathrm{Lim}\left(\frac{\Delta F_y}{\Delta M}\right)_{\Delta M \equiv 0} = Y,$$
$$\mathrm{Lim}\left(\frac{\Delta F_z}{\Delta M}\right)_{\Delta M \equiv 0} = Z.$$

Ce sont les projections de la force extérieure appliquée au point O, rapportée à l'unité de masse.

L'équation (1) devient donc :

$$\frac{dp}{dx} = \rho\left(X - \frac{d^2x}{dt^2}\right).$$

On aurait de même :

$$\frac{dp}{dy} = \rho\left(Y - \frac{d^2y}{dt^2}\right), \quad \frac{dp}{dz} = \rho\left(Z - \frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

Ce sont les équations fondamentales de l'hydrodynamique ; transformons-les en remarquant que $\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}$, sont les dérivées totales de u, v, w, ce qui donne :

$$X - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx} = \frac{du}{dx}u + \frac{du}{dy}v + \frac{du}{dz}w + \frac{du}{dt},$$
$$Y - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy} = \frac{dv}{dx}u + \frac{dv}{dy}v + \frac{dv}{dz}w + \frac{dv}{dt},$$
$$Z - \frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz} = \frac{dw}{dx}u + \frac{dw}{dy}v + \frac{dw}{dz}w + \frac{dw}{dt}.$$

364. Équations de continuité. — Ces équations étant insuffisantes pour détermiuer u, v, w, p, ρ, nous y ajouterons l'équation, dite de *continuité*, basée sur l'hypothèse d'une répartition continue du fluide. Considérons le parallélépipède rectangle OABC O'A'B'C' (*Fig.* 142) dont les arètes Δx, Δy, Δz, sont prises à volonté mais à la condition de former un volume constamment occupé par le fluide. Pendant le temps Δt, la variation de sa masse est égale à l'excès de la matière entrée par les différentes faces, sur celle qui en est sortie. Or au point quelconque M de la face OABC une molécule ne pénètre dans ce volume que par suite de la compo-

sante u de sa vitesse, puisque v et w sont parallèles à cette face. Il s'ensuit que la masse des molécules entrant par ce point à l'instant t, ramenée à la fois à l'unité de temps et à l'unité de surface, est ρu. Donc la matière entrée par la face OABC pendant le temps Δt est égale à

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_o^{\Delta y}\int_o^{\Delta z} \rho u dydzdt.$$

Évaluons de même la matière émise par la face opposée. Menons MM' parallèle à OX. Pour passer du point M au point M' situé dans la face A'B'C'O', il suffit de faire varier x de Δx. Le produit ρu en M, devient $\rho u + \int_o^{\Delta x} \frac{d.\rho u}{dx} dx$ en M', et la matière sortie par la face A'B'C'O' pendant le temps Δt, est donnée par l'intégrale :

$$\int_t^{t+\Delta t}\int_o^{\Delta z}\int_o^{\Delta y} \left(\rho u + \int_o^{\Delta x} \frac{d.\rho u}{dx} dx\right) dydzdt.$$

Si l'on ne considère que les faces parallèles au plan des YZ, l'excès de la masse entrée dans le parallélépipède sur celle qui en est sortie est donc exprimé par la formule :

$$-\int_4 \frac{d.\rho u}{dx} dxdydzdt.$$

Comme il en est de même pour les autres couples de faces, l'accroissement total de la masse du parallélépipède pendant le temps Δt a pour expression :

$$-\int_4 \left(\frac{d.\rho u}{dx} + \frac{d.\rho v}{dy} + \frac{d.\rho w}{dz}\right) dxdydzdt.$$

Mais si à l'époque t, la densité en un point est ρ, à l'époque $t + \Delta t$, elle est devenue $\rho + \int_t^{t+\Delta t} \frac{d\rho}{dt} dt$ puisque les coordonnées x, y, z, n'ont pas changé et que le temps seul a varié. La masse du parallélépipède a passé de la valeur $\int_4 \rho dxdydz$ à la valeur nouvelle $\int dxdydz \left(\rho + \int_t^{t+\Delta t} \frac{d\rho}{dt} dt\right)$; sa variation pendant le temps Δt est égale à $\int_4 \frac{d\rho}{dt} dxdydzdt$. De là l'égalité :

$$-\int_4 \left(\frac{d.\rho u}{dx} + \frac{d.\rho v}{dy} + \frac{d.\rho w}{dz}\right) dxdydzdt = \int_4 \frac{d\rho}{dt}\, dxdydzdt.$$

Les limites d'intégration sont d'ailleurs arbitraires et les mêmes pour toutes les intégrales, en sorte que l'on a :

$$-\frac{d.\rho u}{dx} - \frac{d.\rho v}{dy} - \frac{d.\rho w}{dz} = \frac{d\rho}{dt},$$

$$\text{ou} \quad (1)\ \frac{d\rho}{dt} + \frac{d.\rho u}{dx} + \frac{d.\rho v}{dy} + \frac{d.\rho w}{dz} = 0.$$

C'est l'équation de *continuité.*

365. Conditions complémentaires. — La cinquième équation dépend de la nature du fluide. S'il s'agit d'un liquide, ρ est constant et l'équation de continuité devient :

$$(1') \quad \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

Les équations du nº 363 et (1') suffisent alors pour déterminer u, v, w, p.

Lorsqu'il s'agit des gaz, on dispose des équations nº 363, de (1) et de la loi $\rho = Kp$, qu'ils suivent à température constante. Théoriquement le problème est résolu ; pratiquement il ne l'est pas, car les équations précédentes ne sont généralement pas intégrables.

366. Mouvement permanent. — *Le mouvement du fluide est dit permanent lorsque dans toute sa masse, la vitesse, la pression et la densité sont constantes aux mêmes points de l'espace.* Ceci ne peut exister que si les forces extérieures satisfont aux mêmes conditions. Ainsi X, Y, Z, aussi bien que u, v, w, p, ρ, sont simplement fonctions de x, y, z. Il en résulte que toutes les molécules qui passent par un point de l'espace ont le même mouvement. La trajectoire commune qu'elles décrivent, est en quelque sorte réalisée par la succession continue des molécules qui passent, ont passé ou passeront par la position considérée. Ainsi matérialisée, elle prend le nom de *filet liquide.*

Nous citerons, comme exemples du mouvement permanent, l'écoulement de l'eau dans les canaux et les tuyaux, de pente et de section constantes. La permanence du mouvement s'exprime analytiquement par les relations :

$$\frac{du}{dt} = 0, \quad \frac{dv}{dt} = 0, \quad \frac{dw}{dt} = 0, \quad \frac{dp}{dt} = 0, \quad \frac{d\rho}{dt} = 0,$$

les dérivées partielles par rapport au temps, s'annulent dans les équations générales de l'hydrodynamique (363) et dans l'équation de continuité. Celles-ci conviennent à un point quelconque du fluide, et les constantes d'intégration, déterminées en partant de la position initiale M_0, caractérisent le filet liquide qui passe par ce point.

367. Intégrale de la force vive. — Les équations du n° 363 montrent que dans le mouvement permanent, la molécule fluide ramenée à l'unité de masse, est soumise aux forces dont les composantes sont :

$$X, Y, Z, -\frac{\frac{dp}{dx}}{\rho}, -\frac{\frac{dp}{dy}}{\rho}, -\frac{\frac{dp}{dz}}{\rho}.$$

Elles ne dépendent que de x, y, z. Or ρ, constant pour les liquides parfaits, est égal à Kp pour les gaz parfaits. Dans les deux cas, les trois dernières composantes sont les dérivées partielles d'une même fonction de x, y, z, dans laquelle n'entre pas explicitement le temps. L'intégrale de la force vive n'existe donc que si les forces extérieures ont une fonction des forces $\varphi(x, y, z)$, c'est-à-dire que

$$X = \frac{d\varphi}{dx}, \quad Y = \frac{d\varphi}{dy}, \quad Z = \frac{d\varphi}{dz}.$$

Dans ces conditions le théorème de la force vive, appliqué à un point quelconque du fluide pendant l'intervalle de temps $t - t_0$, donne par unité de masse :

$$\frac{V^2}{2} - \frac{V_0^2}{2} = \varphi - \varphi_0 - \int_{t_0}^{t} \frac{1}{\rho}\left(\frac{dp}{dx}\,dx + \ldots\right)$$

Or :

$$\int_{t_0}^{t} \frac{1}{\rho}\left(\frac{dp}{dx}\,dx + \frac{dp}{dy}\,dy + \frac{dp}{dz}\,dz\right) = \int_{p_0}^{p} \frac{dp}{\rho} = P - P_0,$$

si l'on désigne par P la fonction qui a pour dérivée $\frac{1}{\rho}$. Il vient donc :

$$(5) \quad \frac{V^2}{2} - \frac{V_0^2}{2} = \varphi(x, y, z) - \varphi_0(x, y, z) + P_0 - P.$$

368. Théorème de Bernouilli. — L'équation précédente est applicable lorsque la pesanteur est la seule force extérieure. Prenons alors l'axe OZ positif dirigé suivant la verticale ascendante. On a, pour un gaz :

$$\varphi = -gz, \quad \rho = Kp, \quad P = \int \frac{1}{K}\frac{dp}{p} = \frac{1}{K}\log_n p,$$

$$\frac{V^2}{2} - \frac{V_0^2}{2} = -gz + gz_0 - \frac{1}{K}\log_n p + \frac{1}{K}\log_n p_0,$$

donc :

$$\frac{V^2}{2} + gz + \frac{1}{K}\log_n p = \frac{V_0^2}{2} + gz_0 + \frac{1}{K}\log_n p_0 = C^{te}.$$

Pour un liquide pesant :

$$\rho = C^{te} = \frac{\varpi}{g}, \quad P = \frac{p}{\rho} = \frac{gp}{\varpi},$$

$$\frac{V^2}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \frac{V_0^2}{2} + gz_0 + \frac{p_0}{\rho}$$

équation que l'on met sous la forme

$$\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\varpi} + z = \frac{V_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\varpi} + z_0 = C^{te} = H.$$

Elle reçoit en hydraulique une interprétation géométrique des plus importantes. Soient AB le filet liquide, z la cote d'un point M au-dessus du plan horizontal de comparaison *(Fig. 143)*. Portons sur la verticale de ce point une longueur $MM' = \frac{p}{\varpi}$, puis une longueur $M'M'' = \frac{V^2}{2g}$. La verticale mM'' représente le premier membre de l'équation précédente. Si l'on répète cette construction pour les autres points du filet liquide, le lieu de l'extrémité se trouve dans un plan horizontal, appelé *plan de charge :* La somme $\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\varpi}$ est dite la *charge*. De là le théorème de Bernouilli :

Fig 143.

En tous les points d'un filet liquide permanent, sans viscosité, soumis à la seule action de la pesanteur, la hauteur du plan de charge est constante.

369. Problème. *Mouvement relatif et permanent d'un liquide pesant dans un canal animé d'un mouvement de rotation uni-*

forme. Nous étudierons ce mouvement en appliquant le théorème de la force vive et en négligeant toutes les actions intérieures. Les forces extérieures au liquide, abstraction faite des pressions, sont le poids et les forces fictives dues au mouvement de rotation. Parmi celles-ci, nous ne considérons que la force d'inertie d'entraînement, car le travail de la force centrifuge composée est toujours nul (223). Si l'on admet la rotation uniforme, la première force se réduit à la force centrifuge, dont l'intensité par unité de masse placée au point M est $\omega^2 r$ (*Fig.* 144). C'est une fonction exclusive des coordonnées et elle a pour fonction des forces $\frac{\omega^2 r^2}{2}$, puisque l'expression du travail est $\int \omega^2 r dr$. Mais la pesanteur possédant aussi une fonction des forces, il en sera de même de la force résultante et si nous prenons l'axe des z vertical et positif dans le sens ascendant, on a :

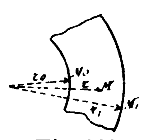


Fig. 144.

$$\varphi = -gz + \frac{\omega^2 r^2}{2}.$$

Dans ces conditions, $v_0, v_1, r_0, r_1, p_0, p_1$ étant les vitesses relatives, les rayons et les pressions à l'entrée et à la sortie du canal mobile, l'équation (5), appliquée entre ces limites, devient :

$$\frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g} = \frac{\omega^2 r_1^2}{2g} - \frac{\omega^2 r_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\varpi} - \frac{p_1}{\varpi} - z_1 + z_0,$$

ou

$$\frac{v_1^2 - \omega^2 r_1^2}{2g} + \frac{p_1}{\varpi} + z_1 = \frac{v_0^2 - \omega^2 r_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\varpi} + z_0.$$

Elle est utilisée dans la théorie des turbines.

§ 3. *Hydrostatique*

370. **Équations fondamentales.** — *On donne une masse fluide en équilibre. On demande la pression en chaque point, en fonction de* ρ, X, Y, Z, *considérées comme fonctions continues de* x, y, z.

Il suffit de reprendre les équations de l'hydrodynamique (363) et d'y annuler les accélérations. Il vient :

$$\frac{dp}{dx} = \rho X, \quad \frac{dp}{dy} = \rho Y, \quad \frac{dp}{dz} = \rho Z.$$

Ce sont les équations fondamentales de l'hydrostatique, que l'on remplace par la relation unique

$$dp = \rho (Xdx + Ydy + Zdz).$$

Il s'ensuit que ρ est facteur d'intégration de l'expression $Xdx + Ydy + Zdz$ et les conditions d'intégrabilité du produit, représentent les conditions d'équilibre.

Dans cette hypothèse :

$$p = f(x,y,z) + C.$$

Or le fluide en équilibre, est limité par certaines surfaces, appelées ***surfaces libres***, qui satisfont à cette relation. Il n'en est plus ainsi, s'il est contenu dans un vase et cela par suite des parois qui produisent les pressions convenables.

371. **Principe de l'égale transmission des pressions.** — Au point M_0 d'un fluide en équilibre renfermé dans un vase, on produit une pression p_0 par unité de surface. L'équilibre subsiste, mais les réactions des parois sont modifiées, et la répartition des pressions se fait suivant la loi :

$$p = f(x, y, z) + C.$$

Nous déterminons la constante par la relation :

$$p_0 = f(x_0, y_0, z_0) + C,$$

établie pour le point M_0. Nous aurons donc :

$$p = p_0 + f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0).$$

La pression p comprend deux parties : l'une $f(x,y,z) - f(x_0,y_0,z_0)$ dépend de la position du point ; l'autre est la pression exercée en M_0. Toute modification dans la valeur de celle-ci se transmet intégralement aux autres points du fluide.

372. **Fonction des forces extérieures.** — Il arrive que les forces extérieures au fluide admettent une fonction des forces. S'il

en est ainsi, l'équilibre exige que $\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}$, $\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy}$, $\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz}$, soient les dérivées partielles d'une même fonction de p, ce qui a lieu :

1° pour un liquide parfait, puisque ρ est constant ;

2° pour un gaz parfait à température constante, puisque $\rho = Kp$, et par suite les dérivées partielles proviennent de la fonction $\frac{1}{K}\log_n p$.

Réciproquement, un fluide parfait n'est en équilibre que s'il y a fonction des forces extérieures.

En effet, qu'il s'agisse d'un liquide ou d'un gaz parfait, $\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx}$, $\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dy}$, $\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dz}$, sont les dérivées partielles d'une même fonction de x, y, z ; dès lors les équations fondamentales de l'hydrostatique prouvent qu'il en est de même de X, Y, Z, c'est-à-dire qu'il y a fonction des forces.

373. **Surfaces de niveau.** — Dans un fluide en équilibre, on appelle *surface de niveau, le lieu géométrique des points pour lesquels la pression conserve la même valeur.*

Nous avons trouvé au n° 370 la loi de la répartition des pressions mise sous la forme :

$$p = f(x,y,z) + C, \quad \text{ou bien} \quad f(x,y,z) = p - C = \alpha.$$

C'est l'équation générale des surfaces de niveau. A chaque valeur particulière de p, correspond une valeur déterminée de α et une surface bien définie, pour laquelle dp est nul. Or ρ est nécessairement différent de zéro. De là l'équation différentielle des surfaces de niveau :

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0,$$

trouvée en dynamique. Les propriétés des surfaces de niveau sont donc connues, il suffit de les rappeler et de les compléter.

1° En tout point d'une surface de niveau, la résultante des forces extérieures lui est normale.

2° Par tout point de l'espace, passe une surface de niveau et n'en passe qu'une seule.

3° La densité est constante sur une même surface de niveau.

En effet, d'après le n° 367, l'expression

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

est la différentielle exacte de $\varphi(x, y, z)$; et par conséquent tout facteur d'intégration de cette expression doit être une fonction de φ. Or ρ est un de ces facteurs, puisque

$$\rho\,(Xdx + Ydy + Zdz) = \rho\, d\varphi = dp \text{ (n° 370)},$$

donc ρ et p sont des fonctions de φ, donc ρ est une fonction de p, et p étant constant dans une surface de niveau, ρ l'est aussi.

De plus s'il s'agit d'un gaz, la densité est fonction de la température et les surfaces de niveau sont des surfaces isothermes.

Remarquons aussi que la surface libre d'un fluide soumis à une pression constante, est une surface de niveau. C'est le cas de la surface des eaux tranquilles et cette propriété a valu aux surfaces d'égal potentiel, le nom de surfaces de niveau.

374. **Équilibre d'un fluide pesant.** — Le fluide est soumis aux actions de la pesanteur et nous le rapportons à trois axes rectangulaires en prenant l'axe OZ positif, dirigé suivant la verticale ascendante. Il en résulte :

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -g.$$

Les équations d'équilibre se réduisent donc à la seule relation :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g = -\frac{\varpi}{g} g = -\varpi,$$

et l'équation des surfaces de niveau devient :

$$z = c^{te}.$$

D'où l'on conclut que *dans un fluide pesant en équilibre, les surfaces de niveau sont des plans horizontaux*. Il en est ainsi de la surface libre, lorsque la pression extérieure est constante.

En vertu du n° 373, *la densité est constante en tous les points d'un plan horizontal*. La stabilité de l'équilibre exige d'ailleurs que le centre de gravité soit le plus bas possible (254). Cette condition est remplie quand le fluide est partagé en couches horizontales de même densité, disposées de manière à ce que celle-ci aille en croissant de haut en bas.

Enfin la formule $\frac{dp}{dz} = -\varpi$, donne par intégration :

$$p = p_0 + \int_z^{z_0} \varpi dz \quad \text{ou} \quad p - p_0 = \int_z^{z_0} \varpi dz.$$

Or $\int_z^{z_0} \varpi dz$ est le poids d'une colonne verticale fluide, de base égale à l'unité de surface, et de hauteur $z_0 - z$, donc : *La différence des pressions entre deux plans horizontaux d'un fluide pesant en équilibre, est égale au poids de la colonne verticale comprise entre ces deux plans, qui aurait pour base l'unité de surface* (1 m²).

375. **Gaz pesant en équilibre.** — Soit ϖ_0 le poids du mètre cube de gaz à la température zéro degré et sous la pression p_0. Le poids ϖ à la température t^o et sous la pression p, résulte de la formule :

$$\varpi = \frac{p\varpi_0}{p_0(1 + \alpha t)} = \frac{p}{K(1 + \alpha t)}.$$

Remplaçons cette quantité par sa valeur dans l'équation d'équilibre des fluides pesants, il vient :

$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dz} = -\frac{1}{K(1 + \alpha t)}.$$

Cette équation, intégrée en supposant la température constante, donne :

$$(1) \quad p = p_0 e^{-\frac{z - z_0}{K(1 + \alpha t)}}.$$

La pression décroît suivant cette loi exponentielle lorsque $z - z_0$ augmente ; elle reste sensiblement constante lorsque la masse gazeuse est peu étendue, par suite de la faible densité du fluide.

L'équation (1) fait connaître $z - z_0$ si la pression p est déterminée par observation directe. Elle sert de base au nivellement barométrique.

376. **Liquide pesant en équilibre.** — L'équation $\frac{dp}{dz} = -\varpi$, dans laquelle ϖ devient une constante, donne par intégration :

$$p + \varpi z = c^{te} \quad \text{ou} \quad (1)\ z + \frac{p}{\varpi} = H.$$

Cette relation, où $\frac{p}{\varpi}$ est la pression par mètre carré estimée en colonne liquide, est susceptible d'une représentation géométrique. En chaque point, portons sur la verticale ascendante une longueur égale à $\frac{p}{\varpi}$. (*Fig.* 145) Le lieu des extrémités se trouve dans le plan horizontal défini par la hauteur H; c'est le *plan de charge.* De là le théorème : *En tous les points d'un liquide pesant en équilibre, la hauteur du plan de charge est constante.*

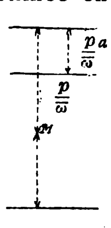


Fig 145.

Ce qui précède s'applique aux fluides naturels. Ils ont généralement une surface libre soumise à la pression atmosphérique p_a, par suite cette surface est horizontale et située à une distance $\frac{p_a}{\varpi}$ au-dessous du plan de charge.

De l'équation (1) on conclut que la pression en un point d'un *liquide pesant en équilibre, est égale au poids de la colonne liquide qui aurait pour base l'unité de surface (mètre carré) et pour hauteur la distance du point considéré au plan de charge.*

377. **Problème.** — *On donne un fluide pesant en équilibre. On demande la pression qu'il exerce sur une paroi plane du vase qui le contient* (*Fig.* 146).

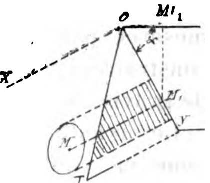


Fig. 146

Les pressions étant normales à la surface plane et de même sens, ont une résultante équivalente, appliquée en un point de la paroi que l'on appelle le *centre de pression.* Rapportons la surface donnée à un axe OX horizontal, dirigé suivant l'intersection du plan de la paroi avec le plan de charge et à un axe OY positif, mené suivant la ligne de plus grande pente du plan de la paroi et vers le bas. Soit α l'angle de OY avec sa projection horizontale. La pression en un point quelconque M de la surface est $\varpi M_1M_1'$ ou $\varpi y \sin \alpha$. Si l'on reprend les notations du nº 239, la pression totale a pour expression :

$$P = \int_s \varpi y \sin \alpha \, dxdy = \varpi \sin \alpha \int_s ydxdy = \varpi S y_1 \sin \alpha.$$

C'est le poids de la colonne liquide qui a pour base la surface considérée et pour hauteur la distance de son centre de gravité au plan de charge.

Les coordonnées a, b, du centre de pression sont données par les formules du centre des forces parallèles et l'on a facilement :

$$a = \frac{\int\int xydxdy}{\int\int ydxdy}, \quad b = \frac{\int\int y^2dxdy}{\int\int ydxdy}.$$

Le centre de pression se confond donc avec le centre de percussion de la paroi, pris par rapport à l'intersection de son plan avec le plan de charge (345). La pression totale qui y est appliquée, est le poids du cylindre liquide qui a pour base la paroi et pour hauteur la distance de son centre de gravité au plan de charge.

Très souvent le problème se simplifie ; tel est le cas pour une paroi, qui a son axe de symétrie suivant une ligne de plus grande pente. Le centre de pression doit s'y trouver.

On ramène la recherche de ce point à celle d'un centre de gravité par les considérations suivantes. Portons normalement à lá paroi et en chacun de ses points, une longueur égale à sa distance au plan de charge. Le lieu des extrémités de ces droites est un plan OI, qui fait avec le plan de la paroi un angle dont la tangente est égale à sin α.

Dans ces conditions, la pression produite sur la surface S est mesurée par le poids du cylindre tronqué que nous venons de construire. Le centre de pression devient la projection du centre de gravité de ce volume sur la paroi.

Les résultats précédents s'appliquent à un liquide non homogène en équilibre, car ils supposent simplement la pression constante dans un plan horizontal. Mais alors ϖ reste sous le signe intégrale dans les différentes valeurs que nous avons calculées.

Si l'on demande la pression, abstraction faite de la pression atmosphérique, il faut remplacer le plan de charge par la surface libre du liquide. C'est ce que nous ferons dans les applications suivantes.

378. **Application.** — *Quelle est par mètre courant, la pression sur un mur de quai dont le parement a l'inclinaison* α, *la profondeur d'eau étant* h^m (*Fig.* 147) ?

Considérons un rectangle de 1 m. de largeur et dirigeons ses côtés suivant les les lignes de plus grande pente. Il y a donc un axe de symétrie de même direction, que nous prendrons pour axe OY. On a facilement :

$$S = \frac{h}{\sin \alpha}, \quad y_1 = \frac{h}{2 \sin \alpha}, \quad P = \frac{\varpi h^2}{2 \sin \alpha}.$$

$$a = 0, \quad b = \frac{\int\int y^2 dxdy}{\int\int ydxdy} = \frac{I_x}{Sy_1} = \frac{2}{3} \frac{h}{\sin \alpha}.$$

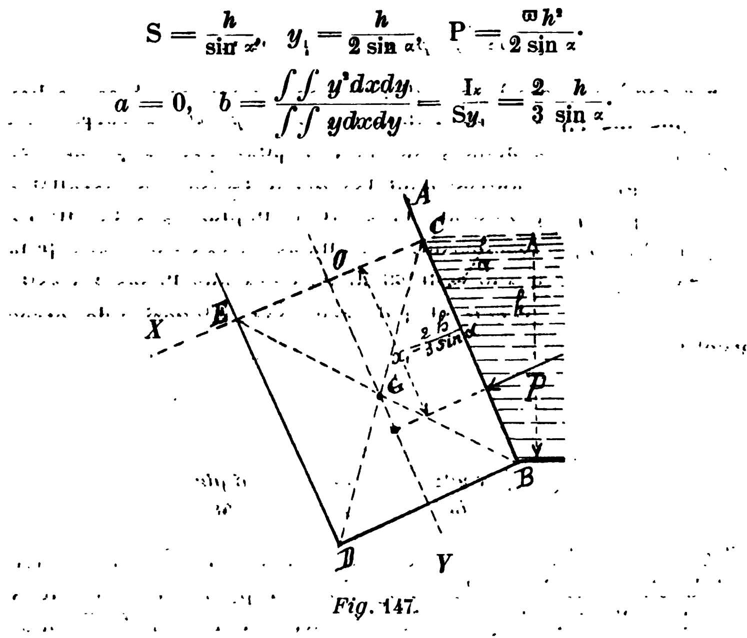


Fig. 147.

On serait arrivé au même résultat par la considération du prisme construit sur BCDE comme il est dit au n° 377.

379. **Principe d'Archimède.** — Lorsque la surface pressée par le fluide est courbe, les pressions normales développées en chacun de ses points n'ont plus nécessairement une résultante unique équivalente. Toute question d'intégration mise à part, le problème revient à trouver un système équivalent composé d'un couple et d'une force. Il existe un cas remarquable pour lequel les pressions se réduisent a une seule force. Nous le définissons par le principe d'Archimède. *Les pressions exercées par un fluide pesant en équilibre sur la surface d'un corps solide qui y est plongé, ont une résultante unique équivalente, égale et directement opposée au poids du volume fluide déplacé. Elle est appliquée au centre de gravité de ce volume.* Ce point est dit le *centre de carène;* la résultante des pressions s'appelle la *poussée.*

Rapportons le système fluide aux axes rectangulaires OXYZ, où OZ positif est dirigé suivant la verticale ascendante (*Fig.* 148). Un point quelconque M de la surface du corps immergé est soumis à une pression normale p dont les angles directeurs sont λ, μ, ν et

les composantes $p \cos \lambda$, $p \cos \mu$, $p \cos \nu$. Les pressions sont donc ramenées à trois systèmes de forces parallèles aux axes.

Examinons d'abord les composantes suivant OX. Une parallèle à celui-ci menée par M, perce le corps en un second point M'; il peut encore y en avoir d'autres, mais comme la surface est fermée, les points de percée vont toujours par couples. Ne considérons que l'un de ceux-ci. Les deux points qui le composent sont sur une même surface de niveau, et par suite sont soumis aux mêmes pressions. En conservant des notations analogues aux précédentes, les composantes de la pression en M' sont :

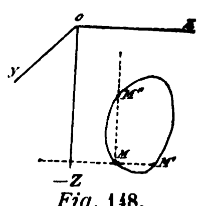


Fig. 148.

$$p \cos \lambda', \quad p \cos \mu', \quad p \cos \nu'.$$

Or $p \cos \lambda$ et $p \cos \lambda'$ sont directement opposées et ceci a lieu pour tous les couples de points tels que M, M'. La surface du corps est d'ailleurs divisée en deux parties par la courbe de contact du cylindre tangent dont les génératrices sont parallèles à OX. L'une d'elles contient le point M, l'autre le point M'. La première donne les composantes parallèles à l'axe des x positif, la seconde à l'axe des x négatif. Si nous réservons l'accent à cette dernière partie, les résultantes de ces deux catégories de forces seront :

$$\int pds \cos \lambda, \quad \int pds' \cos \lambda' \quad \text{ou bien} \quad \int_2 pdydz, \quad -\int_2 pdydz,$$

puisque

$$\cos \lambda = \frac{dydz}{ds}, \quad \cos \lambda' = -\frac{dydz}{ds'}.$$

Ces forces sont égales et de sens contraires; en effet, la pression n'est fonction que de z et les intégrales se rapportent toutes deux au contour limitant la projection du corps sur le plan ZOY. Elles sont aussi directement opposées, car le centre des forces parallèles est déterminé, pour l'une et l'autre catégories, par les formules :

$$y_1 = \frac{\int_2 pydydz}{\int_2 pdydz}, \quad z_1 = \frac{\int_2 pzdydz}{\int_2 pdydz}.$$

On arrive à une conclusion identique pour les composantes parallèles à OY ; restent les composantes parallèles à OZ. La ver-

ticale menée par M perce la surface du corps en M″ ; la pression p'' en ce point a pour composantes :

$$p'' \cos \lambda'', \quad p'' \cos \mu'', \quad p'' \cos \nu''.$$

En raisonnant comme précédemment, nous ramenons les composantes suivant OZ à deux forces équivalentes : l'une $\int_s p\,dxdy$ est positive, l'autre $\int_s p''dxdy$ est négative. Elles auront une résultante unique égale à $\int_s (p - p'')\, dxdy$, car les pressions p et p'' se rapportent aux mêmes x et y, et les intégrales sont déterminées par le même contour sur le plan XOY. Il est d'ailleurs démontré au n° 374 que

$$p - p'' = \int_z^{z''} \varpi dz,$$

donc

$$\int_s (p - p'')\, dydz = \int_s \varpi\, dxdydz.$$

La poussée, équivalente aux pressions développées sur la surface du corps, est donc égale au poids du volume fluide déplacé et de sens contraire. Sa ligne d'action, parallèle à OZ, est définie par les coordonnées x_1, y_1 du centre des forces parallèles correspondant. Ce sont :

$$x_1 = \frac{\int_s \varpi\, xdxdydz}{\int_s \varpi dxdydz}, \quad y_1 = \frac{\int_s \varpi\, ydxdydz}{\int_s \varpi\, dxdydz}.$$

Elles se rapportent au centre de gravité du volume fluide déplacé, sans qu'il soit nécessaire de faire intervenir z_1, puisque les forces sont parallèles à OZ.

Le principe d'Archimède est applicable à un corps plongé dans un fluide pesant en équilibre, qu'il soit homogène ou hétérogène. Il suffit que la densité soit constante dans un plan horizontal.

380. **Théorème.** — *Lorsqu'une surface concave ou convexe, soustendue par une surface plane, est soumise en tous ses points à une pression normale constante, il existe une résultante unique équivalente, égale à la pression totale que produirait dans les mêmes conditions, la pression exercée sur la surface plane soustendante la surface considérée* (*Fig.* 149).

Imaginons que le plan fermant la surface donnée ABCDE, soit soumis en chacun de ses points, à la même pression normale que cette surface et qu'elle soit dirigée dans le même sens, par rapport à la surface fermée ainsi obtenue. Celle-ci est en équilibre, en vertu du raisonnement qui vient d'être tenu. Or les pressions normales à la surface plane ABCD ont une résultante unique, par conséquent les pressions sur la surface courbe ABCDE ont une résultante égale et directement opposée à la précédente. — Ce résultat s'applique aux pressions développées par un gaz à température constante sur les parois du vase qui le contient. S'il s'agit d'un liquide pesant, une démonstration semblable à celle du nº 379, prouve que les pressions exercées sur les parois du vase, ont une résultante égale au poids du liquide. En général elle est toute différente de la pression supportée par le fond. Celle-ci est plus grande, égale ou plus petite que le poids du liquide, d'après la forme du vase (paradoxe hydrostatique). Le paradoxe disparait si l'on remplace la pression sur le fond par l'action totale sur ce fond, comprenant la pression ou la traction des parois latérales sur le contour du fond.

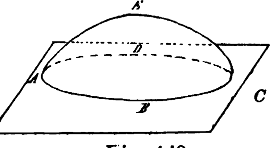


Fig. 149.

381. Problème. — *Calculer le travail de la poussée, quand on enfonce verticalement un prisme droit dans un liquide homogène.*

Soient ABCD, le prisme, s sa section, h sa hauteur, y la hauteur verticale dont il est immergé à l'instant t (*Fig.* 150). La poussée est ϖsy, en valeur absolue; la puissance correspondante a pour valeur $-\varpi sy \frac{dy}{dt}$ et le travail nécessaire à l'enfoncement du prisme est donné par la formule :

Fig. 150.

$$-\int_0^h \varpi sy \frac{dy}{dt} = -\varpi \frac{sh^2}{2}.$$

382. Stabilité de l'équilibre des corps flottants. — 1º *Le corps est complètement immergé* (*Fig.* 151). Il subit l'action de deux forces verticales et de sens contraires : la poussée et le poids du corps. L'équilibre exige qu'elles soient égales et directement opposées : le centre de gravité du corps et le centre de carène sont donc sur une même verticale. Pour qu'il y ait stabilité, le

second doit être au-dessus du premier. En effet, s'il ne l'est pas, et que nous déplacions le corps de sa position d'équilibre, la poussée et le poids constituent un couple de forces qui tend à faire chavirer le système. Au contraire, lorsque le centre de carène est au-dessus du centre de gravité, le couple tend à ramener le corps dans sa position d'équilibre.

2° Quand le corps est incomplètement immergé, on démontre que l'équilibre est stable, lorsque le centre de gravité est au-dessous d'un point, appelé ***métacentre***, situé sur la verticale commune du centre de gravité et du centre de carène, à une distance au-dessus de celui-ci égale au rapport du moment d'inertie minimum de la section de flottaison, au volume immergé.

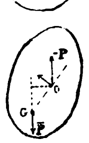


Fig. 151.

Le moment d'inertie minimum correspond au grand axe de l'ellipse centrale d'inertie de la section de flottaison. Dans les navires cette droite est connue : elle joint la poupe à la proue.

Le théorème précédent est établi dans l'hypothèse d'une eau tranquille. S'il y a mouvement, les actions dynamiques du liquide peuvent ne pas concourir à la stabilité. Le problème devient très complexe et n'est pas encore résolu théoriquement, bien qu'il soit de la plus haute importance pour les navires.

ANNEXE.

NOTE I.

Sur la cinématique analytique (1).

Au premier alinéa du n° 107 du texte, il semble y avoir une certaine exagération dans les termes employés. Il n'est pas tout-à-fait exact que le mouvement ait été étudié dans les chapitres précédents en partant de considérations *purement* géométriques, et la méthode qui va être exposée au chapitre XII n'est pas non plus *purement* analytique. Dans la méthode géométrique, il y a un peu d'analyse, comme dans l'autre il y a un peu de géométrie.

Mais, en adoptant ces désignations approximatives, il n'est pas exact non plus que la méthode analytique soit *indispensable* pour la suite du cours. Sans doute cette méthode est intéressante, très instructive; elle a servi d'ailleurs de méthode d'invention; mais il n'en est pas moins vrai que l'on ne compromettrait ni l'ordre logique, ni la rigueur des déductions, en supprimant tout le chapitre XII, à l'exception du n° 112, qui devrait, au contraire, être développé, afin de bien montrer que l'étude des mouvements simultanés d'un corps solide suffit pour établir les équations du n° 108, donnant les trois composantes de la vitesse angulaire en fonction des trois coordonnées d'Euler, sans faire intervenir les neuf angles auxiliaires $a, \ldots c''$. Certains numéros des chapitres antérieurs pourraient aussi recevoir quelques développements dans le même sens.

NOTE II.

Sur les expériences pouvant servir à démontrer les relations entre les accélérations, les masses et les forces.

En cinématique, on a défini l'accélération. En mécanique, il faut définir la masse et la force (dans cet ordre ou dans l'ordre inverse) et établir que :

(1) Cette note et les trois suivantes m'ont été communiquées par M. De Tilly.

La force totale agissant sur un point matériel est égale au produit de sa masse par son accélération.

Or cette propriété peut être considérée de deux manières bien différentes : soit comme une définition de la force, soit comme un fait à démontrer expérimentalement.

A. Dans le premier cas, il faut dire ce que l'on entend par la masse ; d'après les uns, c'est la quantité de matière contenue dans le point, définition très vague pour plusieurs raisons (1) ; d'après les autres, c'est un simple coefficient attribué à chaque point matériel, et il faut admettre que ces coefficients puissent être choisis de telle façon qu'il ne se présente aucune contradiction dans le développement ultérieur de la science mécanique (2).

Tout en signalant le vague que cette méthode présente au début, nous devons reconnaître qu'elle est très simple et qu'elle est adoptée par de bons auteurs. Nous ne la discuterons pas davantage et nous nous bornerons à constater que dans la plupart des traités de physique et dans plusieurs traités de mécanique, on part, quelquefois sans le faire remarquer explicitement, de la notion première de la *force*, considérée, non comme un simple produit algébrique, mais comme une réalité objective, une grandeur physique.

B. L'accélération étant relative au système de comparaison

(1) La comparaison directe des quantités de matière est tout d'abord impossible quand il s'agit de substances différentes. Alors c'est la notion de masse qui doit précéder, et la masse sert de mesure à la quantité de matière.

Mais même pour une seule substance, divisée en points matériels identiques, on rencontre un autre inconvénient, soit que l'on veuille démontrer l'équivalence des diverses définitions, soit que l'on veuille prouver par un raisonnement la proportionnalité de la force à la quantité de matière. L'auteur de ce cours y a fait allusion au n° 125.

Pour plus de détails sur ce sujet, voir notre *Mémoire sur divers points de la philosophie des sciences mathématiques (Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, décembre 1901*)*.

(2) On a cherché à prouver que ces coefficients pourraient se déterminer par l'expérience, sans invoquer la notion de force ; mais ces expériences paraissent peu réalisables. Cette conception revient en quelque sorte à admettre que l'*ensemble* des expériences qui se font ou qui se sont faites dans l'univers prouve l'exactitude de l'*ensemble* des principes de la mécanique, tandis que nous cherchons, au contraire, à trouver des expériences *préliminaires* réalisables, qui prouvent l'exactitude des notions *préliminaires* de la mécanique.

adopté pour les coordonnées et pour les mouvements, et la force n'étant (par définition ou autrement) que le produit de l'accélération par la masse, la force doit être aussi relative au système de comparaison.

Or si la force est une réalité physique, cette propriété ne paraît pas pouvoir s'appliquer aux forces apparentes, ou relatives à des systèmes quelconques ; mais uniquement à la force absolue, par rapport à un système immobile. Les forces apparentes, ou relatives à des systèmes quelconques, restent de simples produits des accélérations par les masses.

Tout en convenant que cette remarque est à l'avantage de ceux qui considèrent *toujours* la force comme un simple produit, nous maintiendrons l'idée physique de la force absolue par rapport au système immobile, ou de la force absolue agissant sur un point matériel, considérée en elle-même, non seulement parce que c'est le système suivi par la majorité des auteurs (souvent sans explications suffisantes), non seulement parce que l'idée de *force* ou de *cause* d'accélération nous paraît être une de celles qu'il ne faut pas chercher à extirper (1), mais encore parce que la présente Note a pour objet principal les expériences relatives à l'accélération, à la masse et à la force, expériences qui n'ont de sens que si la force est considérée en elle-même.

Nous devons donc supposer que nous exécutions nos expériences en prenant pour repère un système immobile, ou le plus immobile que nous connaissions.

En ce qui concerne les accélérations, nous les mesurons d'abord par rapport à la terre ; nous pouvons ensuite, si nous le voulons, les transformer en accélérations par rapport au système des étoiles fixes, mais nous avons vu en cinématique que la différence sera négligeable, sauf dans le cas de grandes vitesses ou de longues durées d'expérience.

Quant aux masses et aux forces, nous n'aurons pas besoin de

(1) L'idée de force contient, comme cas particulier, celle de l'absence de force, ou l'idée du point libre ; et le point libre, à son tour, conduit à une définition simple du système immobile. C'est celui par rapport auquel les points libres (ou seulement trois points libres) décrivent des lignes droites d'un mouvement uniforme. D'un autre côté, cette idée devient nécessaire si l'on veut qu'il puisse se produire d'autres accélérations dans l'univers que celles qui correspondent aux actions des points matériels les uns sur les autres.

savoir les mesurer *a priori* ; mais seulement de savoir employer, dans une expérience, la même masse ou la même force que dans une expérience antérieure. Pour les masses, pas de difficulté, puisque la masse qui a été employée une première fois s'est conservée et peut être employée de nouveau.

Pour les forces, il n'en est pas de même. La force qui a été employée a disparu et il est nécessaire d'expliquer comment on emploira une force *égale* en elle-même, abstraction faite de ses résultats dynamiques. Pour cela, nous admettons qu'une force reste constante lorsque, agissant pendant un certain temps sur un dynamomètre, elle lui laisse constamment la même tension et que deux forces sont égales lorsque, dans les conditions précédentes, elles donnent la même tension à un même dynamomètre (dans deux expériences successives), ou à deux dynamomètres identiques. Deux forces, agissant simultanément ou successivement sur deux points matériels sont égales lorsque, dans les conditions précédentes, elles donnent la même tension à un même dynamomètre ou à deux dynamomètres identiques, *intercalés* entre le point d'où émane la force et le point matériel sur lequel elle agit, et placés le plus près possible de ce point matériel.

C'est seulement grâce à ces explications que nous pourrons comprendre la possibilité des expériences indiquées très sommairement au début de presque tous les traités de mécanique (1).

Ces expériences peuvent se résumer en trois énoncés :

a) Une force constante donne une accélération constante à un point matériel;

b) Les forces peuvent se mesurer par les produits des accélérations par les masses. Démonstration expérimentale, en employant d'abord une masse unique et en évaluant numériquement les forces ;

c) Même énoncé. Démonstration expérimentale en employant

(1) M. Poincaré va plus loin. D'après lui, la reproduction d'une force est impossible, et les expériences préliminaires sont illusoires. “ Les forces „ dit-il, “ ne sont pas des chevaux que l'on peut détacher d'une voiture pour les atteler à une autre „. Tout en trouvant cette opinion de l'illustre géomètre un peu exagérée, on ne peut s'empêcher de reconnaître que les autres auteurs, en général, sautent à pieds joints au-dessus de difficultés sérieuses ; et que sans la notion du dynamomètre intercalé, ou quelque chose d'analogue, les expériences préliminaires seraient réellement inintelligibles.

d'abord une force unique et en évaluant numériquement les masses.

L'énoncé *a* est compris, au fond, dans *b* et *c*, et peut se démontrer en même temps ; mais il faut se garder de le considérer comme une vérité évidente, à l'exemple de certains auteurs. Il en serait ainsi avec la définition *A* de la force. Mais quand la constance d'une force n'est indiquée que par la constance de son action statique sur le dynamomètre, il n'est pas évident que son action dynamique sur le point matériel, c'est-à-dire l'accélération, soit aussi constante. C'est un fait que l'expérience, et elle seule, doit faire constater.

Nous arrivons enfin à la détermination du programme des expériences *b* et *c*. Nous disons : du programme, car nous n'avons pas l'intention d'entrer dans le détail matériel de ces expériences. C'est plutôt l'affaire des physiciens expérimentaux, qui cependant se montrent aussi, dans leurs ouvrages, fort sobres d'explications à ce sujet.

Nous nous bornerons à signaler trois causes d'imperfection auxquelles il nous paraît difficile que ces expériences échappent complètement :

1° Impossibilité d'agir sur de véritables *points* matériels.

2° Nécessité de réduire les frottements au minimum, car on ne pourra pas en tenir compte, leur théorie n'étant pas connue au moment où les expériences sont censées faites.

3° Difficulté d'imprimer à une masse une accélération *constante*, plus grande que celle de la pesanteur.

b) Arrivons maintenant au § *b*, mesure des forces et des masses en employant d'abord une masse unique. On fixera arbitrairement sa valeur numérique. On lui appliquera différentes forces, avec dynamomètre intercalé, et on constatera d'abord que chaque force, si elle est constante au dynamomètre, donne une accélération constante. On évaluera toutes ces forces par le produit de la masse fixée arbitrairement, par les accélérations constatées. On pourra, si l'on veut, graduer en conséquence le dynamomètre, numériquement.

Mais il faudra ensuite (et c'est la partie principale de l'expérience) qu'en employant d'autres masses et en recommençant avec chacune d'elles tout ce qui vient d'être dit, on retrouve les mêmes résultats, c'est-à-dire que pour chaque masse les forces indiquées par le dynamomètre soient proportionnelles aux accélérations.

Alors on mesurera chaque masse autre que la masse primitive par le quotient de la force par l'accélération, et on aura ainsi la certitude que la relation entre ces trois quantités existera pour toutes les forces et pour toutes les masses.

Plus tard, quand on aura choisi des unités rationnelles ou conventionnelles pour les forces et pour les masses, on modifiera proportionnellement tous les nombres résultant de l'évaluation provisoire.

c) Mesure des masses et des forces en employant d'abord une force unique. On fixera arbitrairement sa valeur numérique. On l'appliquera à différentes masses, avec dynamomètre intercalé et on constatera d'abord que si la force reste constante au dynamomètre, elle donnera à chaque masse une accélération constante (mais variable d'une masse à l'autre).

On évaluera toutes ces masses par le quotient de la force, fixée arbitrairement, par les accélérations constatées. Toutes les masses auront ainsi une grandeur numérique.

Mais il faudra ensuite (et c'est la partie principale de l'expérience) qu'en employant d'autres forces et en recommençant avec chacune d'elles ce qui vient d'être dit, on retrouve les mêmes résultats, c'est-à-dire que pour chaque force les valeurs déjà connues des masses soient inversement proportionnelles aux accélérations.

Alors on mesurera chaque force autre que la force primitive par le produit de la masse par l'accélération et on aura ainsi la certitude que la relation entre ces trois quantités existera pour toutes les masses et pour toutes les forces.

Plus tard, quand on aura choisi des unités rationnelles ou conventionnelles pour les masses et pour les forces, on modifiera proportionnellement tous les nombres résultant de l'évaluation provisoire.

NOTE III

Sur le principe des vitesses virtuelles

Ce principe peut être considéré sous deux points de vue différents, suivant que les liaisons existant dans le système sont définies physiquement, ou analytiquement.

Pour le premier cas, nous renverrons au paragraphe 4, chapitre V, de notre *Essai sur les principes fondamentaux de la géométrie et de la mécanique.*

Le cas des liaisons exprimées analytiquement est plus important au point de vue de l'application aux problèmes de mécanique rationnelle et c'est le seul dont il ait été question dans ce Cours.

Nous pensons qu'il faut s'efforcer de le traiter, selon le conseil de Duhamel (1), en écartant le plus possible les considérations physiques et en raisonnant directement sur les équations de liaison.

Ce n'est pas ce que font les auteurs en général. Non seulement ils matérialisent les liaisons, mais ils en ajoutent ou en suppriment ; bref, ils emploient des raisonnements qui laissent beaucoup à désirer, mais qui cependant ne peuvent pas être rejetés d'une manière absolue, tant qu'il n'existera pas une théorie analytique irréprochable.

L'auteur du présent Cours a cherché à se rapprocher du but, en se basant sur certaines idées (un peu vagues) que nous lui avions communiquées ; mais il est certain que la question n'est pas complètement élucidée. Elle ne le sera pas encore après les explications complémentaires que nous allons donner et qui, malgré cela, ne nous paraissent pas inutiles.

Nous reportant au n° 200 du texte et en supposant, pour fixer les idées, qu'il y ait trois liaisons ($k = 3$), on pourra certainement décomposer la force de liaison agissant en un point suivant les trois normales aux trois surfaces de liaison qui passent par ce point et dont chacune est obtenue en considérant x, y, z, comme seules variables dans l'équation de liaison correspondante, les autres quantités étant remplacées par les valeurs qu'elles prennent au moment où le point considéré arrive en x, y, z.

Pour chaque liaison, L par exemple, et pour chaque point, les projections sur les axes de la force de liaison normale à la surface correspondante seront

$$\mu \frac{dL}{dx}, \quad \mu \frac{dL}{dy}, \quad \mu \frac{dL}{dz}.$$

Pour un même point et pour toutes les liaisons, les composantes seront :

(1) *Des Méthodes dans les sciences de raisonnement*, t. IV, p. 143.

$$\mu_1 \frac{dL_1}{dx_1} + \nu_1 \frac{dL_2}{dx_1} + \dots + \theta_1 \frac{dL_K}{dx_1},$$
$$\mu_1 \frac{dL_1}{dy_1} + \nu_1 \frac{dL_2}{dy_1} + \dots + \theta_1 \frac{dL_K}{dy_1},$$
$$\mu_1 \frac{dL_1}{dz_1} + \nu_1 \frac{dL_2}{dz_1} + \dots + \theta_1 \frac{dL_K}{dz_1};$$
$$\vdots$$

et l'on aura par conséquent :

$$(A) \left\{ \begin{array}{l} X_1 + \mu_1 \frac{dL_1}{dx_1} + \dots + \theta_1 \frac{dL_K}{dx_1} = m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2}, \\ \qquad \vdots \\ Z_n + \mu_n \frac{dL_1}{dz_n} + \dots + \theta_n \frac{dL_K}{dz_n} = m_n \frac{d^2z_n}{dt^2}. \end{array} \right.$$

Ces équations coïncideraient avec les équations (VIII) du texte (nº 202) si l'on admettait que

$$(B) \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n = \lambda_1, \\ \nu_1 = \nu_2 = \dots = \nu_n = \lambda_2, \\ \theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = \lambda_K. \end{array} \right.$$

Si l'on n'admet pas ces égalités, il n'est plus vrai de dire qu'on puisse calculer les $3n$ coordonnées et les k coefficients (portés au nombre de nk) au moyen des équations (A) et des équations de liaison. On doit conclure au contraire qu'il y a moyen de déterminer de plusieurs manières différentes, non pas précisément les forces capables du mouvement observé (car celles-ci restent toujours égales à $m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} - X_1$, etc), mais les éléments constitutifs de ces forces, c'est-à-dire les coefficients μ_1, μ_2, etc.

Il est bien entendu que, de toutes ces déterminations théoriques, une seule répondra à la réalité physique et l'on ignore laquelle.

Toutes ces difficultés disparaissent si, conformément à la théorie ordinaire, on admet les équations (B), lesquelles se vérifient dans toutes les applications que l'on peut faire du principe général à des cas comportant une semblable vérification.

NOTE IV

Sur les propriétés de l'axe d'impulsion dans le mouvement du corps solide de révolution homogène, fixé par un point de son axe de figure.

Pour faire comprendre ces propriétés, nous transformerons les résultats obtenus au n° 288 en considérant un point situé sur l'axe de figure à la distance C*k* de l'origine. Le mouvement θ' autour de l'axe des X communiquerait à ce point une vitesse aX, parallèle à l'axe des Y (le rayon de rotation étant C*k*) et le mouvement ψ' autour de OZ_1, lui communiquerait une vitesse — aY, parallèle à l'axe des X (le rayon de rotation étant C*k* sin θ). Donc on peut énoncer comme il suit la propriété trouvée :

" *Lorsqu'un corps de révolution tournant autour d'un point fixe est soumis à une force rencontrant l'axe de figure et ayant pour moments respectifs* P *autour de* OX (OA) *et* Q *autour de* OY (OB), *le point situé sur cet axe de figure à la distance* C*k* *de l'origine aura pour vitesses* P *parallèlement à l'axe des* X *et* Q *parallèlement à l'axe des* Y ".

Ce théorème, déduit des équations du n° cité, ne peut donc pas être rigoureux, mais voici celui qui est rigoureux, et que nous allons démontrer directement :

" *Lorsqu'un corps de révolution tournant autour d'un point fixe est soumis à une force rencontrant l'axe d'impulsion et ayant pour moments respectifs* P *autour de* OX (OA) *et* Q *autour de* OY (OB), *le point situé sur cet axe d'impulsion à la distance* C*k* *de l'origine aura pour vitesses* P *parallèlement à l'axe des* X *et* Q *parallèlement à l'axe des* Y ".

Nous en baserons la démonstration sur un théorème préliminaire se rapportant à un corps solide quelconque (dont l'ellipsoïde n'a pas besoin d'être de révolution) et à une force quelconque rencontrant l'axe d'impulsion. Le théorème consiste en ce que le moment résultant des quantités de mouvement reste constant en grandeur pendant toute la durée du mouvement. En effet, le point d'application de la force aura pour coordonnées par rapport aux axes mobiles des équations d'Euler (n° 277) λAp, λBq, λCr. Si

X, Y, Z sont les trois projections de la force, ses moments seront (n° 15) :

$$L = Z\lambda Bq - Y\lambda Cr,\ M = ...$$

Les équations d'Euler seront :

$$A\frac{dp}{dt} + qr(C - B) = Z\lambda Bq - Y\lambda Cr,\quad B\frac{dq}{dt} + ...$$

Multipliant la première par Ap, la seconde par Bq, la troisième par Cr et ajoutant, il vient :

$$A^2p\frac{dp}{dt} + B^2q\frac{dq}{dt} + C^2r\frac{dr}{dt} = 0, \text{ d'où :}$$
$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = \text{constante},$$

absolument comme si la force était nulle.

Or cette expression, qui reste constante, est précisément (277) le carré du moment résultant. Le théorème préliminaire est donc démontré.

Observons maintenant que si la force, outre qu'elle rencontre l'axe d'impulsion, rencontre aussi une droite fixe passant par l'origine, le moment total des quantités de mouvement par rapport à cette droite fixe sera aussi constant (théorème des moments).

Le moment total étant constant, et sa projection sur l'axe fixe étant aussi constante, l'angle de l'axe d'impulsion avec l'axe fixe est lui-même invariable et l'on voit que le mouvement conique est rigoureux pour l'axe d'impulsion.

Mais revenons à l'énoncé que nous voulons démontrer. Dans le corps de révolution, la valeur de la constante $\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}$ est Ck, comme nous l'avons déjà trouvé. Ainsi donc en portant Ck sur l'axe d'impulsion, conformément à l'énoncé, nous arrivons précisément à l'extrémité de la longueur qui représente le moment. Les vitesses de ce point, parallèlement aux X et aux Y des équations d'Euler, sont données par les premiers membres des deux premières équations, donc aussi par les seconds membres L et M. Or on a (n° 287) :

$$P = L\cos\varphi - M\sin\varphi,\quad Q = L\sin\varphi + M\cos\varphi,$$

d'où :

$$L = P\cos\varphi + Q\sin\varphi,\quad M = Q\cos\varphi - P\sin\varphi.$$

Ce sont donc là les vitesses suivant OX et OY, et par conséquent les vitesses suivant OA et OB seront :

$$(P \cos \varphi + Q \sin \varphi) \cos \varphi$$
$$- (Q \cos \varphi - P \sin \varphi) \sin \varphi, \text{ c'est-à-dire } P$$

et

$$(P \cos \varphi + Q \sin \varphi) \sin \varphi$$
$$+ (Q \cos \varphi - P \sin \varphi) \cos \varphi, \text{ c'est-à-dire } Q.$$

Le théorème est donc démontré et il sert à faire correspondre l'approximation commise dans l'équation différentielle à une hypothèse déterminée dans les faits physiques et mécaniques. Une pareille étude nous paraît toujours utile dans les cas d'approximation. Alors c'est le bon sens qui juge si le changement introduit dans les conditions mécaniques ou physiques du problème peut amener une perturbation notable dans les résultats. Le bon sens peut tromper, mais il trompera moins que des changements arbitraires apportés à des équations différentielles.

TABLE DES MATIÈRES

LIVRE Ier

THÉORIE VECTORIELLE

CHAPITRE Ier

CHAPITRE II

LIVRE II

CINÉMATIQUE

CHAPITRE III

CHAPITRE IV

CHAPITRE V

CHAPITRE VI

CHAPITRE VII

CHAPITRE VIII

CHAPITRE IX

CHAPITRE X

CHAPITRE XI

CHAPITRE XII

LIVRE III

MÉCANIQUE DU POINT

CHAPITRE XIII

CHAPITRE XIV

CHAPITRE XV

CHAPITRE XVI

CHAPITRE XVII

CHAPITRE XVIII

CHAPITRE XIX

LIVRE IV

MÉCANIQUE DES SYSTÈMES MATÉRIELS

CHAPITRE XX

CHAPITRE XXI

CHAPITRE XXII

CHAPITRE XXIII

CHAPITRE XXIV

CHAPITRE XXV

CHAPITRE XXVI

CHAPITRE XXVII

CHAPITRE XXVIII

CHAPITRE XXIX

CHAPITRE XXX

CHAPITRE XXXI

LIVRE V

MÉCANIQUE DES FLUIDES

CHAPITRE XXXII

Annexes

ERRATA

—

Page 6, fig. 6, au lieu de b_3, il faut : l_3.
„ 6, ligne 11, le premier l_2 doit être : l_1.
„ 16, ligne 9, ajoutez : *ramenés au même point.*
„ 18, „ 4 inf., au lieu de O_1, il faut : O.
„ 20, „ 4, supprimer l'indication (1).
„ 25, supprimer § 1.
„ 37, ligne 14, au lieu de $d \frac{\frac{dx}{dt}}{dt}$ lisez : $\frac{d.\frac{dx}{at}}{dt}$.
„ 50, „ 15, au lieu de *l'axe où même*, lisez : *l'axe, ou même.*
„ 57, „ 1, au lieu de *m*, mettez : M.
„ 61, „ 14 inf., au lieu de *sont relatives*, mettez : *se rapportent.*
„ 61, „ 3 inf., au lieu de *renferme celle*, mettez : *conduit à celle.*
„ 63, au bas de la page, ajoutez : *sauf ce qui sera dit plus loin à cet égard.*
„ 114, ligne 1, au lieu de *équivaut*, mettez : *correspond.*
„ 114, „ 9, au lieu de *force vive*, mettez : *demi force vive.*
„ 121, „ 1 inf., au lieu de $x_0 =$, il faut : $x_0 +$.
„ 122, „ 4 inf., au lieu de $- =$, il faut : $= -$.
„ 125, „ 4 et ligne 7, au lieu de t_g, il faut *tg.*
„ 136, „ 2 et 6, aux premiers membres des équations les *d* des dérivées doivent être remontés à hauteur des barres supérieures.
„ 149, „ 2, au lieu de mKl^2, mettez : mK^2l.
„ 157, „ 10, au lieu de *on a*, il faut : *on a, en prenant* $v_0 = 15^m5$.
„ 166, „ 2, au lieu de $\frac{dz}{dt}$, lisez : $\frac{dy}{dt}$.
„ 166, „ 9, au lieu de *l*, il faut : *a*.
„ 166, „ 14, au lieu de $\frac{a}{g}$, lisez : $\frac{g}{a}$.

Page 174, n° 200, au lieu de *les puissances ..... sont nulles*, lisez : *la somme des puissances ..... est nulle.*

„ 176, ligne 7 inf., au lieu de V, lisez : IV.

„ 180, „ 15, au lieu de *au*, lisez : *aux.*

„ 182, „ 8, au lieu de *lesquels*, lisez : *lesquelles.*

„ 188, „ 8, 9, 10, *m* dans le second membre doit passer dans le premier.

„ 216, „ 10 inf., an lieu de $\int_0^a xdl$, il faut : $\int_0^r xdl$.

„ 217, „ 8 inf., au lieu de $z_1 = \frac{\beta d}{2\pi}$, il faut : $z_1 = \frac{\beta d}{\pi}$.

„ 218, n° 250, lisez : 251.

„ 250, fig. 103, cette figure représente un ellipsoïde allongé, tandis que le raisonnement s'applique à un ellipsoïde aplati.

„ 250, ligne 21, au lieu de *ou*, lisez : *où.*

„ 257, „ 20, au lieu de *celle-ci*, lisez : *celles-ci.*

„ 286, 11 inf., au lieu de *normale*, lisez : *normale aux surfaces en contact.*

